



## 河内塔和斯托克梅耶塔

### 工具：

推荐使用如下图所示的实体游戏模型。

如果没有的话，您可以将几个圆形纸板黏在一起做出每个圆盘，或使用不同大小的硬币，并将它们堆叠在相邻的三个不同位置（不一定要有棍子）。

### 操作者(玩家)：

理想情况下，每人提供一组游戏。也可以每组 2-3 人操作一组游戏，让玩家们互相讨论策略。

年龄：6岁以上。

备注：此活动也适合盲人。

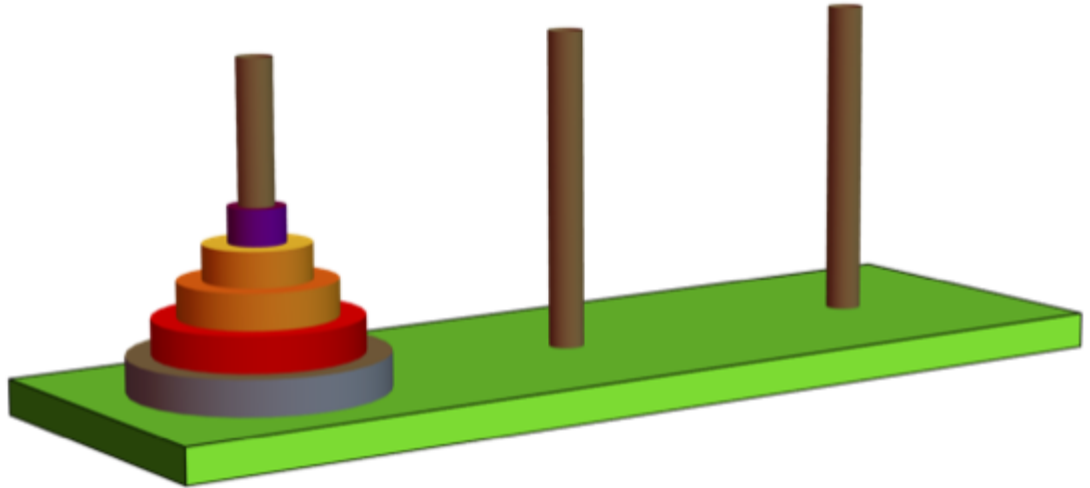
### 河内塔的规则：

有  $N$  个大小递减的圆盘和 three 根木棍， $N$  可以是任意数字，例如下图所示所呈现的 5 个大小递减的圆盘。

一开始，所有圆盘由大到小从底层向上堆叠放在一根棍子上。

操作者只可以将最上面的圆盘从一根棍子移到另一根棍子上，而且不能将圆盘堆放在较小的圆盘。

游戏的目标是将所有圆盘（塔）从最左边的棍子移到最右边的棍子。

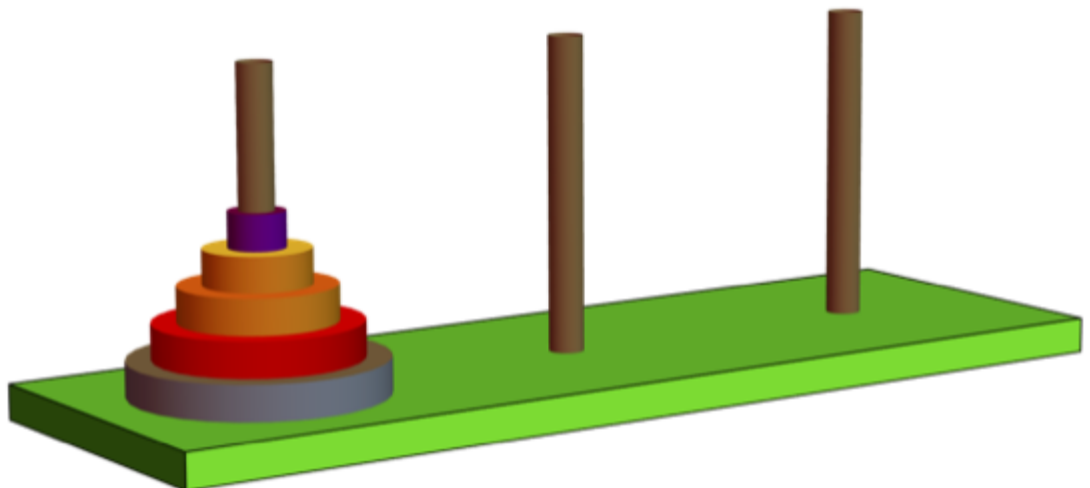


可以挑战的任务：

1. 从三个圆盘开始操作，将所有圆盘从最左边的棍子移到最右边的棍子。最少的步数是多少？
2. 对四个圆盘重复相同的操作，将所有圆盘从最左边的棍子移到最右边的棍子。最少的步数是多少？
3. 对五个圆盘重复相同的操作，将所有圆盘从最左边的棍子移到最右边的棍子。最少的步数是多少？
4. (这道题比较难，需要了解抽象代数。)  
你能猜出  $N$  个圆盘时的最少步数吗？提示：令  $a_N$  为  $N$  个圆盘的最少移动步数。计算  $a_N$  并将之表示成  $a_{N-1}$  的关系式。

相邻河内塔（限相邻棍子之间移动）：

除了前述规则外，此变型需遵守一个额外的限制：仅可将圆盘移动到相邻的棍子。



可以挑战的任务：

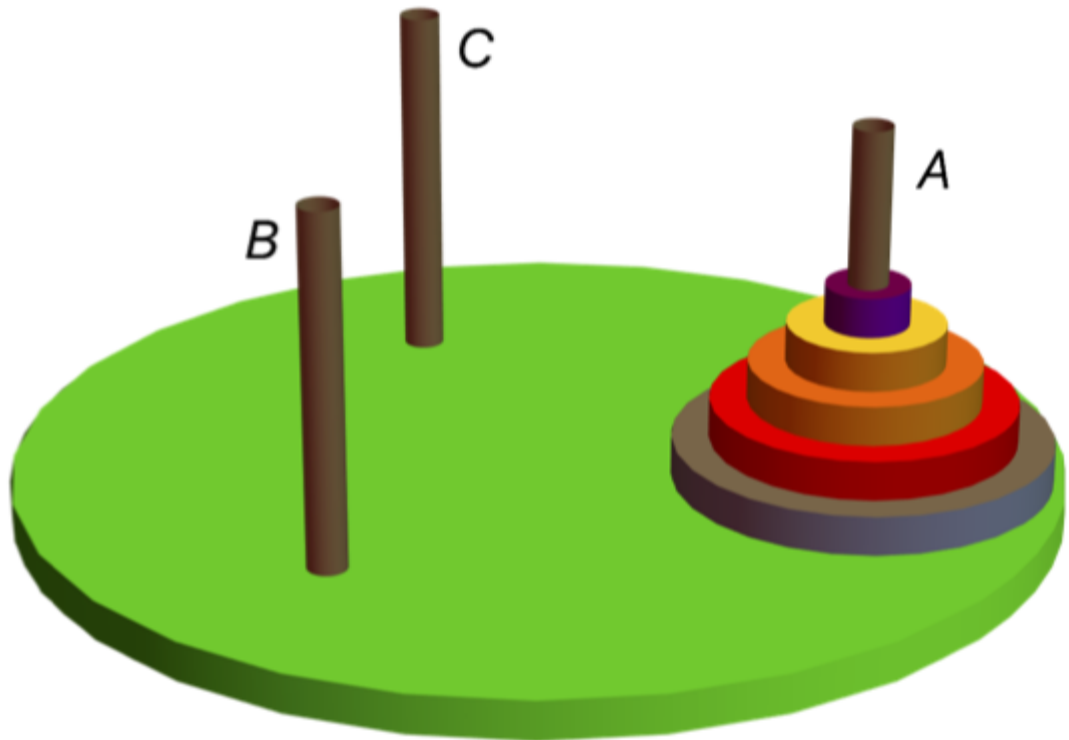
1. 用三个圆盘操作，将所有圆盘从最左边的棍子移到最右边的棍子。最少的步数是多少？
2. 对四个圆盘重复同样的操作，将所有圆盘从最左边的棍子移到最右边的棍子。最少的步数是多少？
3. (这道题比较难，需要了解抽象代数。)  
你能猜出  $N$  个圆盘时的最少步数吗？建议：令  $b_N$  为  $N$  盘的最少移动步数。  
计算  $b_N$  并将之表示成  $b_{N-1}$  的关系式。

小组讨论：

在进行下一个活动之前，您可以针对操作程序进行小组讨论。请玩家解释操作的过程以及找出数学公式的心得。

循环河内塔（限顺时针移动）：

此变型将三根棍子置于三角形的三个顶点上，圆盘只能顺时针移动到下一根棍子上（设A、B、C为顺时针方向的三根棍子）。



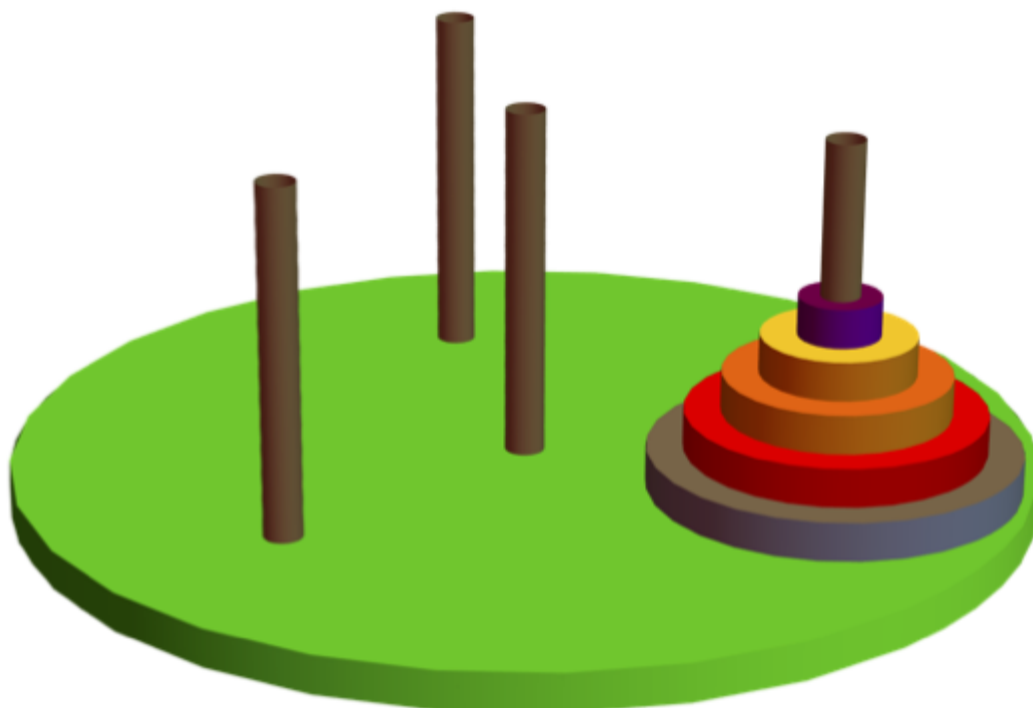
可以挑战的任务：

1. 用三个圆盘操作，将所有圆盘从 A 移动到 B。最少移动多少次？
2. 对四个圆盘重复同样的操作，将所有圆盘从 A 移动到 B。最少移动多少次？
3. 用三个圆盘操作，将所有圆盘从 A 移动到 C。最少移动多少次？
4. 对四个圆盘重复同样的操作，将所有圆盘从 A 移动到 C。最少移动多少次？

### 斯托克梅耶塔(Tower of Stockmeyer):

此变型有  $N$  个大小递减的圆盘和四根棍子。

其中三根棍子位于三角形的三个顶点上，称为侧边的棍子，第四根棍子位于三角形的中心，称为中心的棍子。一开始，所有的圆盘都从下到上由大到小的方式堆叠在其中一根侧边的棍子上。



只可以将最上面的圆盘从侧边的棍子移到中心的棍子或从中心的棍子移动到其中一个侧边的棍子，与河内塔相同，不能将圆盘堆放在较小的圆盘上。

可以挑战的任务：

1. 从两个圆盘开始操作，将所有圆盘从一个侧边的棍子移动到另一个侧边的棍子。证明最少的步数是6步，能做得到吗？
2. 对三个圆盘重复相同的操作，将所有圆盘从一个侧边的棍子移动到另一个侧边的棍子。证明最少步数是12步，能做得到吗？
3. 对四个圆盘重复相同的操作，将所有圆盘从一个侧边的棍子移动到另一个侧边的棍子。证明最少步数是20步，能做得到吗？
4. 对五个圆盘重复相同的操作，将所有圆盘从一个侧边的棍子移动到另一个侧边的棍子。证明最少步数是32步，能做得到吗？

游戏结束之后：

讨论不同的策略。你想建立新规则吗？例如，增加棍子的数量会减少 N 盘的最少移动次数。或者你想创造一个新游戏？

观赏 [Aylean MacDonald 的 Numberphile 视频](#)，里面除了介绍基本游戏（包括没有棍子的纸板版本），还展示在解决游戏时创作音乐的方法、有趣的模式和其他很酷的见解。

做做看并分享出去！

你的手速有多快？拍摄极速玩游戏的过程视频（最好从较高的位置俯拍），甚至可以把视频加速。你能发明新规则吗？使用 #idm314hanoi 和 #idm314 标签分享您的作品、视频、播放列表等。

参考资料：

[Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle](#), Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). *Congr. Numer.* [102 \(1994\)](#), 3–12.

© 2022 Christiane Rousseau

本作品采用 [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#) 国际公众授权条款