



## 河內塔和斯托克梅耶塔

### 道具：

推薦使用如下圖所示的實體遊戲模型。

如果沒有的話，您可以將幾個圓形紙板黏在一起做出每個圓盤，或使用不同大小的硬幣，並將它們堆疊在相鄰的三個不同位置（不一定要有棍子）。

### 操作者（玩家）：

理想情況下，每人提供一組遊戲。也可以每組 2-3 人操作一組遊戲，讓玩家們互相討論策略。

年齡：6歲以上。

備註：此活動也適合盲人。

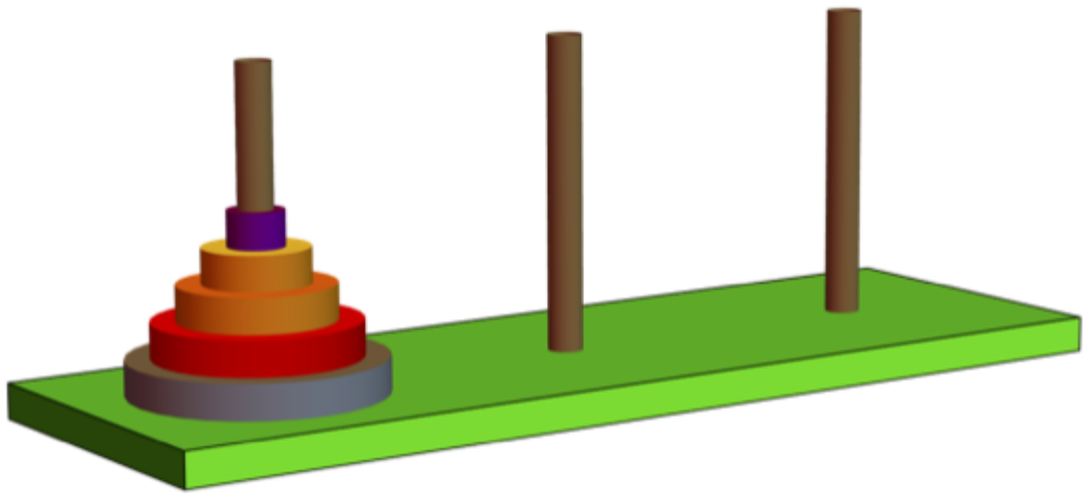
### 河內塔的規則：

有  $N$  個大小遞減的圓盤和三根木棍， $N$  可以是任意數字，例如下圖中所呈現的 5 個大小遞減的圓盤。

一開始，所有圓盤由大到小從底層向上堆疊放在一根棍子上。

操作者只可以將最上面的圓盤從一根棍子移到另一根棍子上，而且不能將圓盤堆放在較小的圓盤上。

遊戲的目標是將所有圓盤（塔）從最左邊的棍子移到最右邊的棍子。

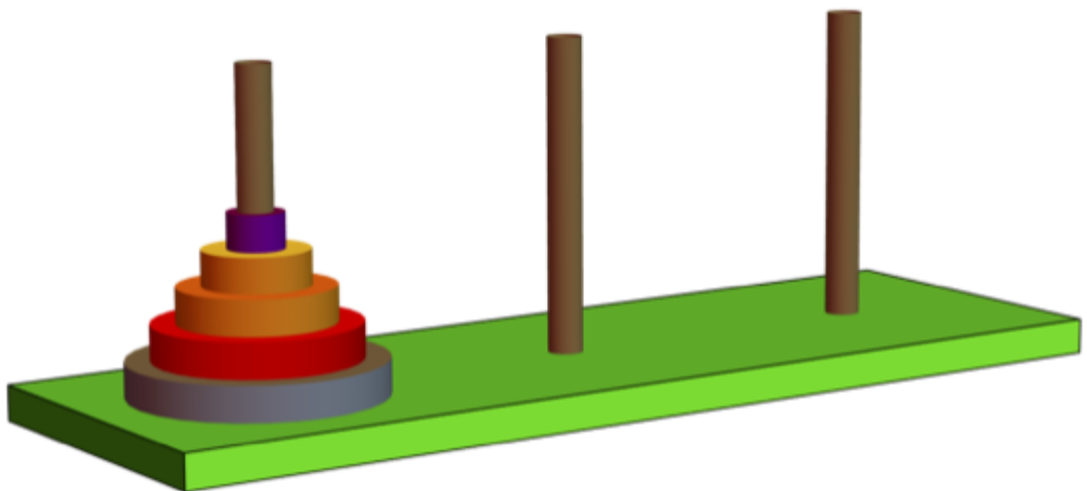


可以挑戰的任務：

1. 從三個圓盤開始操作，將所有圓盤從最左邊的棍子移到最右邊的棍子。最少的步數是多少？
2. 對四個圓盤重複相同的操作，將所有圓盤從最左邊的棍子移到最右邊的棍子。最少的步數是多少？
3. 對五個圓盤重複相同的操作，將所有圓盤從最左邊的棍子移到最右邊的棍子。最少的步數是多少？
4. (這道題比較難，需要了解抽象代數。) 你能猜出  $N$  個圓盤時的最少步數嗎？提示：令  $a_N$  為  $N$  個圓盤的最少移動步數。計算  $a_N$  並將之表示成  $a_{N-1}$  的關係式。

相鄰河內塔（限相鄰棍子之間移動）：

除了前述規則外，此變型需遵守一個額外的限制：僅可將圓盤移動到相鄰的棍子。



可以挑戰的任務：

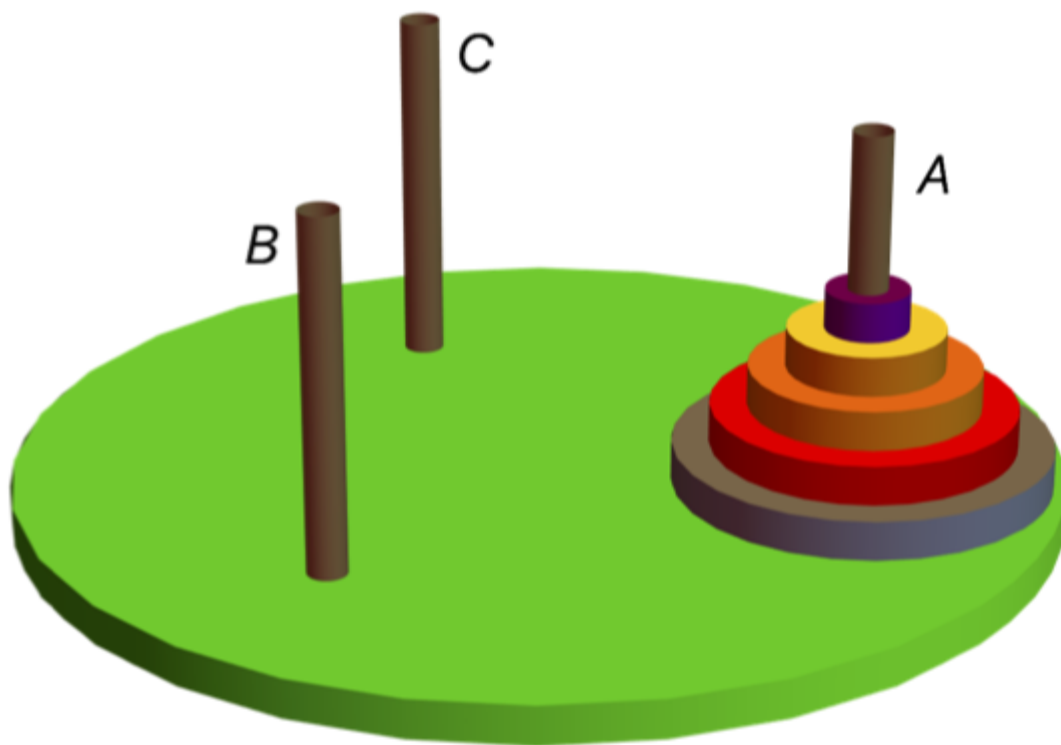
1. 用三個圓盤操作，將所有圓盤從最左邊的棍子移到最右邊的棍子。最少的步數是多少？
2. 對四個圓盤重複同樣的操作，將所有圓盤從最左邊的棍子移到最右邊的棍子。最少的步數是多少？
3. (這道題比較難，需要了解抽象代數。)  
你能猜出  $N$  個圓盤時的最少步數嗎？建議：令  $b_N$  為  $N$  盤的最少移動步數。計算  $b_N$  並將之表示成  $b_{N-1}$  的關係式。

小組討論：

在進行下一個活動之前，您可以針對操作程序進行小組討論。請玩家解釋操作的過程以及找出數學公式的心得。

循環河內塔（限順時針移動）：

此變型將三根棍子置於三角形的三個頂點，圓盤只能順時針移動到下一根棍子上（設A、B、C為順時針方向的三根棍子）。



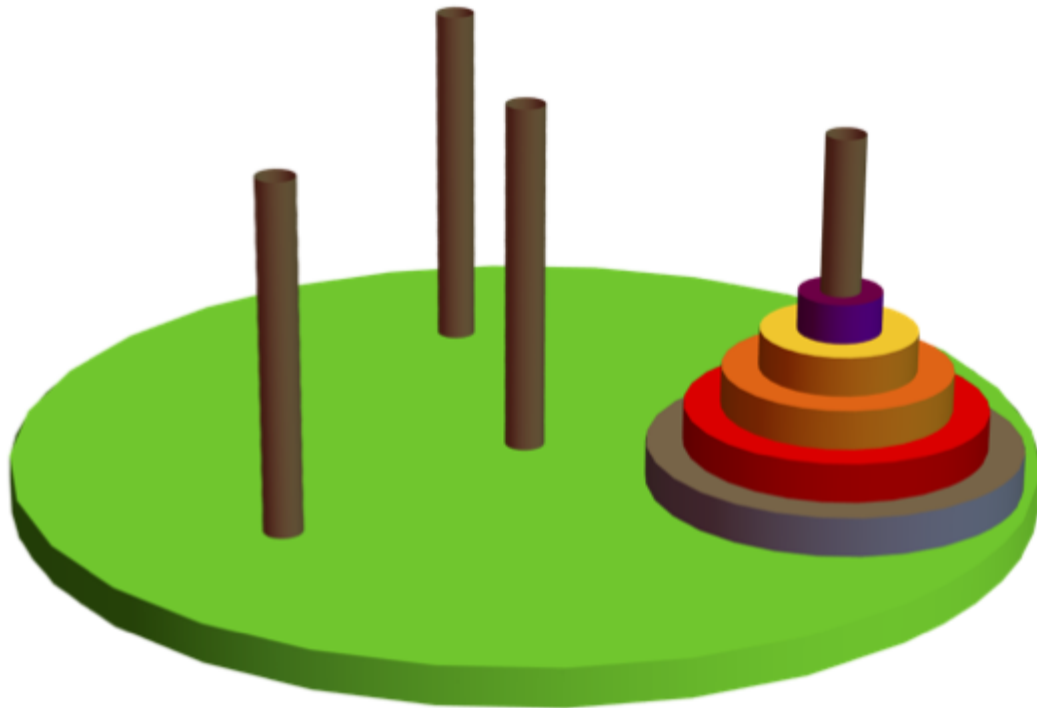
可以挑戰的任務：

1. 用三個圓盤操作，將所有圓盤從 A 移動到 B。最少移動多少次？
2. 對四個圓盤重複同樣的操作，將所有圓盤從 A 移動到 B。最少移動多少次？
3. 用三個圓盤操作，將所有圓盤從 A 移動到 C。最少移動多少次？
4. 對四個圓盤重複同樣的操作，將所有圓盤從 A 移動到 C。最少移動多少次？

### 斯托克梅耶塔(Tower of Stockmeyer):

此變型有  $N$  個大小遞減的圓盤和四根棍子。

其中三根棍子位於三角形的三個頂點，稱為側邊的棍子，第四根棍子位於三角形的中心，稱為中心的棍子。一開始，所有的圓盤都從下到上由大到小的方式堆疊在其中一根側邊的棍子上。



只可以將最上面的圓盤從側邊的棍子移到中心的棍子或從中心的棍子移動到其中一個側邊的棍子，與河內塔相同，不能將圓盤堆放在較小的圓盤上。

可以挑戰的任務：

1. 從兩個圓盤開始操作，將所有圓盤從一個側邊的棍子移動到另一個側邊的棍子。證明最少的步數是6步，能做得到嗎？
2. 對三個圓盤重複相同的操作，將所有圓盤從一個側邊的棍子移動到另一個側邊的棍子。證明最少步數是12步，能做得到嗎？
3. 對四個圓盤重複相同的操作，將所有圓盤從一個側邊的棍子移動到另一個側邊的棍子。證明最少步數是20步，能做得到嗎？
4. 對五個圓盤重複相同的操作，將所有圓盤從一個側邊的棍子移動到另一個側邊的棍子。證明最少步數是32步，能做得到嗎？

遊戲結束之後：

討論不同的策略。你想建立新規則嗎？例如，增加棍子的數量會減少 N 盤的最少移動次數。或者你想創造一個新遊戲？

觀賞 [Aylean MacDonald 的 Numberphile 影片](#)，裡面除了介紹基本遊戲（包括沒有棍子的紙板版本），還展示在解決遊戲時創作音樂的方法、有趣的模式和其他很酷的見解。

做做看並分享出去！

你的手速有多快？拍攝極速玩遊戲的過程影片（最好從較高的位置俯拍），甚至可以把影片加速。你能發明新規則嗎？使用 #idm314hanoi 和 #idm314 標籤分享您的作品、影片、播放列表等。

參考資料：

[Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle](#), Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). *Congr. Numer.* [102 \(1994\)](#), 3–12.

© 2022 Christiane Rousseau

本作品採用 [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#) 國際公眾授權條款