

## Hanoi ve Stockmeyer kuleleri

### Hazırlık:

Mümkünse oyunu görseldeki oyun aletleriyle oynamayı tavsiye ediyoruz. Şayet oyun yoksa, birkaç karton daireyi birbirine yapıştırarak her bir disk oluşturabilir ve yanyana üç farklı konumda istifleyebilirsiniz. İlla çubuk da gerekmez. Farklı boyutlarda bozuk para da kullanılabilir.

### Katılımcılar:

En iyisi kişi başına bir oyun sağlamak. Ama grup başına bir oyun olması ve oyuncuların stratejiyi tartışması da mümkün.

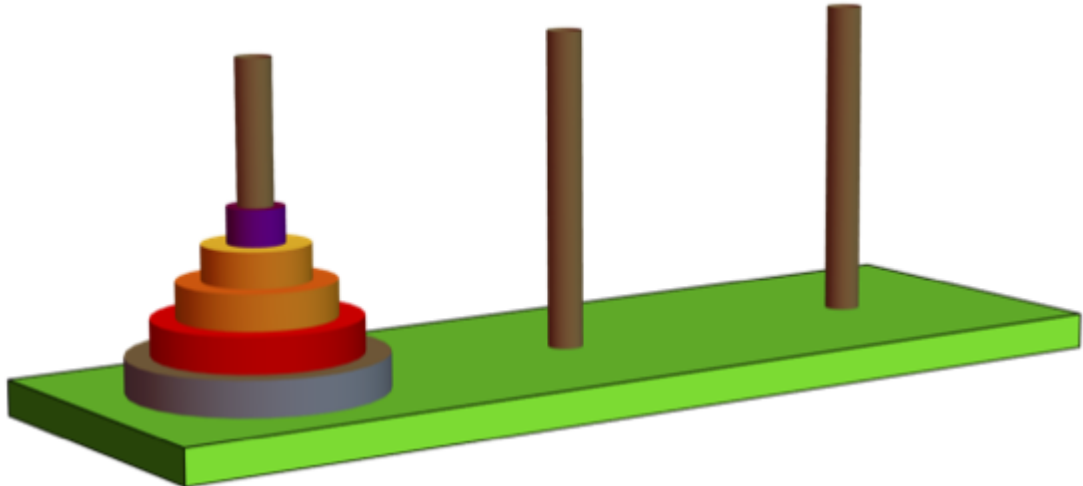
Yaş: 6 yaştan itibaren.

**Not: Bu etkinlik görme engelliler için de uygundur.**

### Hanoi kulesi oyun kuralları:

Küçülen  $N$  sayıda disk ve 3 tane de çubuk olsun.  $N$  herhangi bir sayı olabilir, resimdeki örnekte 5 aldık.

Oyunun başında, tüm diskler tek bir çubuk üzerinde aşağıdan yukarıya doğru küçülecek şekilde dizilir. Üstteki disk bir çubuktan diğerine hareket ettirebiliriz ama hiçbir disk kendinden küçük bir diskin üzerine koymak yok!

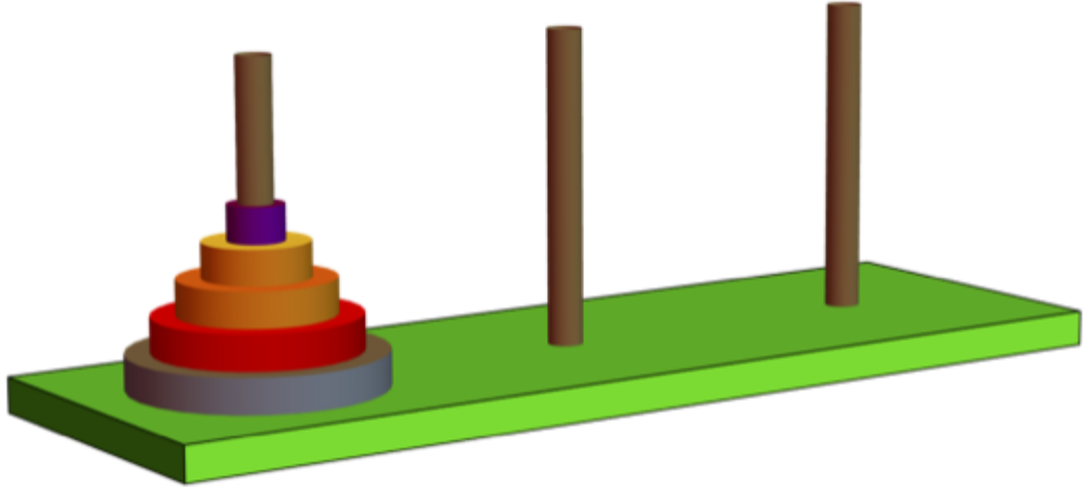


Değişik hedefler neler olabilir?

1. Üç disk ile başlayıp, tüm diskleri sol çubuktan sağ çubuğa taşımak. En az kaç hareket gerekiyor?
2. Aynı oyunu dört disk ile tekrar edelim ve tüm diskleri sol çubuktan sağ çubuğa taşıyalım. En az kaç hareket gerekiyor?
3. Aynı oyunu beş disk ile tekrar edelim ve yine tüm diskleri sol çubuktan sağ çubuğa taşıyalım. En az kaç hareket gerekiyor?
4. **(Bu soru daha zor ve and soyut cebiri bilgisi gerektiriyor.)** N disk için minimum hareket sayısını tahmin etmeye çalışın. Öneri:  $a_N$ , N disk için minimal hareket sayısı olsun.  $a_{N-1}$  bir fonksiyonu olarak  $a_N$  nasıl yazılır?

### Hanoi Kulesi oyunun bitişik çubuklara hareket varyantı:

Ek bir kısıtlama: bir diski sadece bitişikteki bir çubuğa hareket ettirmek.



Değişik hedefler neler olabilir?

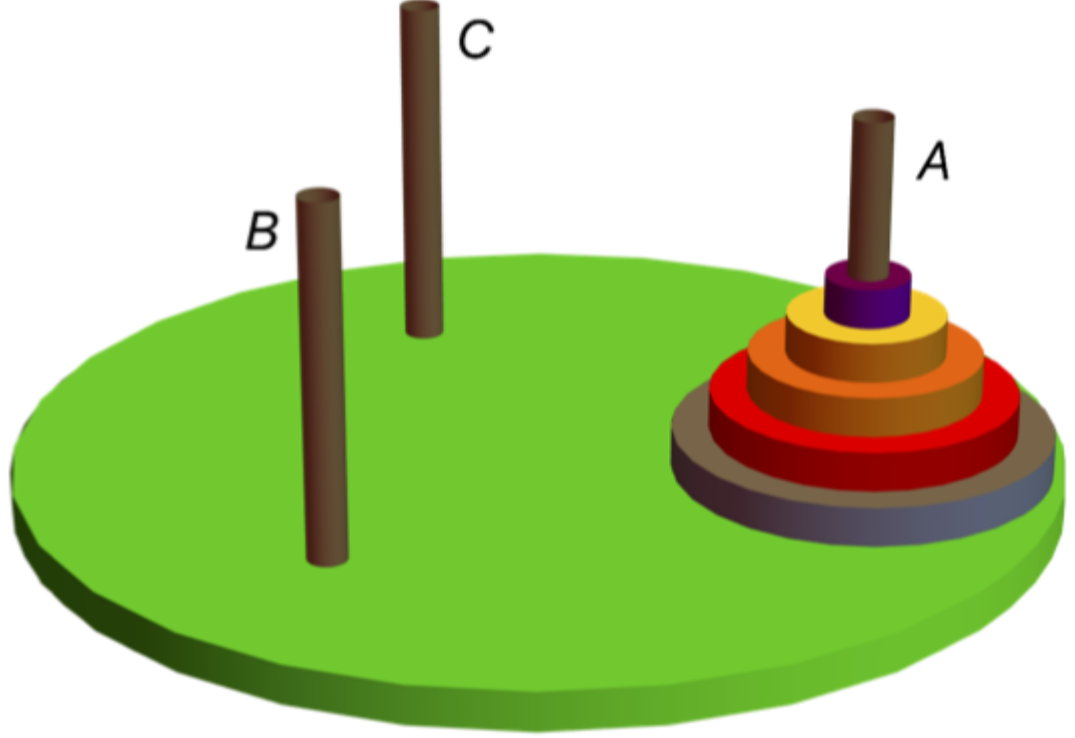
1. Oyunu üç disk ile oynayalım ve diskleri en soldaki çubuktan en sağdakine taşıyalım. En az kaç hareket gerekiyor?
2. Oyunu bu sefer dört disk ile oynayalım ve diskleri en soldaki çubuktan en sağdakine taşıyalım. En az kaç hareket gerekiyor?
3. **(Bu soru daha zor ve and soyut cebiri bilgisi gerektiriyor.)** N disk için minimum hareket sayısını tahmin etmeye çalışın. Öneri:  $b_N$ , N disk için minimal hareket sayısı olsun.  $b_{N-1}$  bir fonksiyonu olarak  $b_N$  nasıl yazılır?

### Birlikte tartışalım:

Sonraki etkinlikere geçmeden önce birlikte tartışma yapmak isteyebilirsiniz. Oyuncular genel prosedürü ve formülü bulma konusundaki düşüncelerini paylaşabilirler.

### Döngüsel Hanoi Kulesi:

Bu oyunda üç çubuk bir üçgenin üç köşesinde ve bir disk sonraki çubuğa yalnız saat yönünde hareket ettirilebilir.



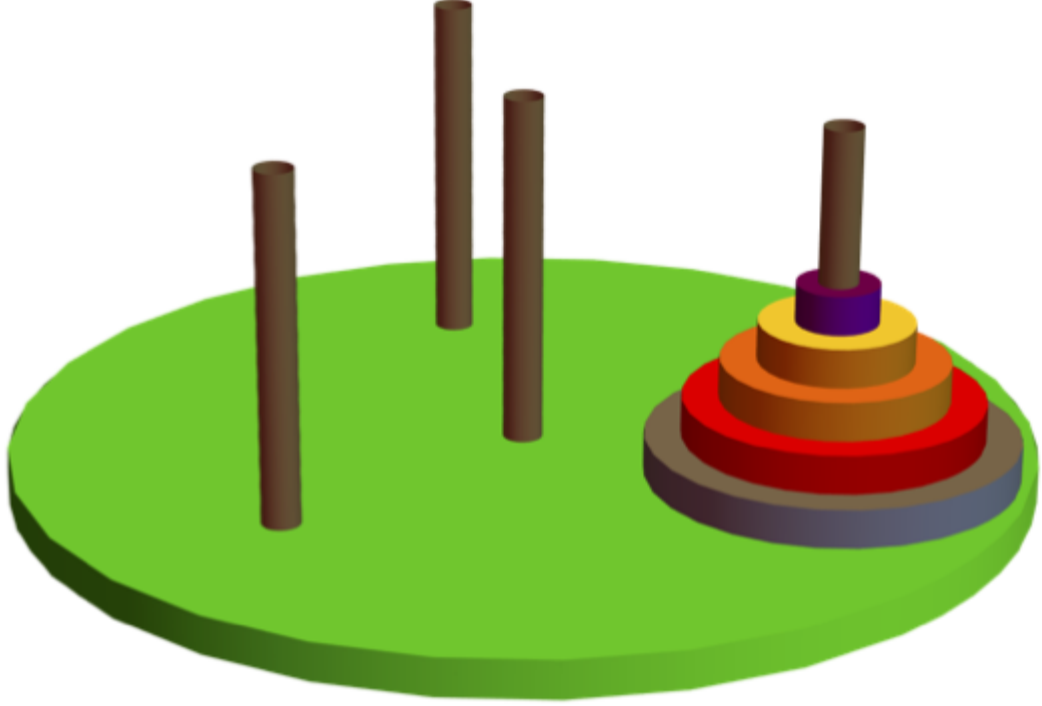
Değişik hedefler:

1. Oyunu 3 disk ile oynayın ve tüm diskleri A'dan B'ye taşıyın. En az kaç hareket gerekiyor?
2. Oyunu 4 disk ile tekrar edin ve tüm diskleri A'dan B'ye taşıyın. En az kaç hareket gerekiyor?
3. Oyunu 3 disk ile oynayın ve tüm diskleri A'dan C'ye taşıyın. En az kaç hareket gerekiyor?
4. Oyunu 4 disk ile tekrar edin ve tüm diskleri A'dan C'ye taşıyın. En az kaç hareket gerekiyor?

### Stockmeyer Kulesi:

Bu oyunda küçülen  $N$  disk ve 4 çubuk var.

Çubuklardan üçü bir üçgenin üç köşesinde, dördüncüsü de üçgenin merkezinde. İlk üçünü *yan çubuk*, dördüncüyü de *merkezi çubuk* olarak adlandıralım. Oyunun başında, tüm diskler tek bir yan çubuk üzerinde aşağıdan yukarıya doğru küçülecek şekilde dizilir.



Hanoi Kulesi oyunu gibi burada da hiçbir disk kendinden küçük bir diskin üzerine koymak yok! Üstteki bir disk de ancak bir yan çubuktan merkezi çubuğa ya da merkezi çubuktan bir yan çubuğa hareket ettirme hakkımız var.

Değişik hedefler:

1. İki disk ile başlayın ve tüm diskleri bir yan çubuktan diğer bir yan çubuğa taşıyın. En az 6 hareket gerektiği ispatlanmıştır. Başarabildiniz mi?
2. Oyunu üç disk ile tekrar edin ve yine tüm diskleri bir yan çubuktan diğer bir yan çubuğa taşıyın. En az 12 hareket gerektiği ispatlanmıştır. Başarabildiniz mi?
3. Oyunu dört disk ile tekrar edin ve yine tüm diskleri bir yan çubuktan diğer bir yan çubuğa taşıyın. En az 20 hareket gerektiği ispatlanmıştır. Başarabildiniz mi?
4. Oyunu bu sefer de beş disk ile tekrar edin ve yine tüm diskleri bir yan çubuktan diğer bir yan çubuğa taşıyın. En az 32 hareket gerektiği ispatlanmıştır. Başarabildiniz mi?

### Oyun ardından:

Farklı stratejileri tartışın. Yeni kurallar icat etmek ister misiniz? Mesela çubuk sayısını arttırmak N disk için minimum hareket sayısını azaltır. Ya da yeni bir oyun yaratmak ister misiniz?

[Numberphile video by Ayliean MacDonald](#) linkinde temel oyunu (çubuksuz bir karton versiyon dahil) tanıtan, oyunu oynarken müzik yaratmanın yolları gibi nefis fikirler, ilginç kalıplar sunan videoya da bir göz atabilirsiniz.

### Yarat ve paylaş!

Oyunu çok hızlı oynayan birinin videosunu çekin (tepeden bir konum en iyisi olur). Videoyu hızlandırmanız da mümkün. Yeni kurallar bulabilir misiniz? Bütün bunları **#idm314hanoi** ve **#idm314** etiketlerini kullanarak paylaşabilirsiniz.

### Kaynak:

[Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle](#), Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). *Congr. Numer.* [102 \(1994\)](#), 3–12.

© 2022 Christiane Rousseau

Çalışmanın lisansı: [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#).