DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA
14 DE MARÇO

Torres de Hanoi e Torres de Stockmeyer

Preparação:

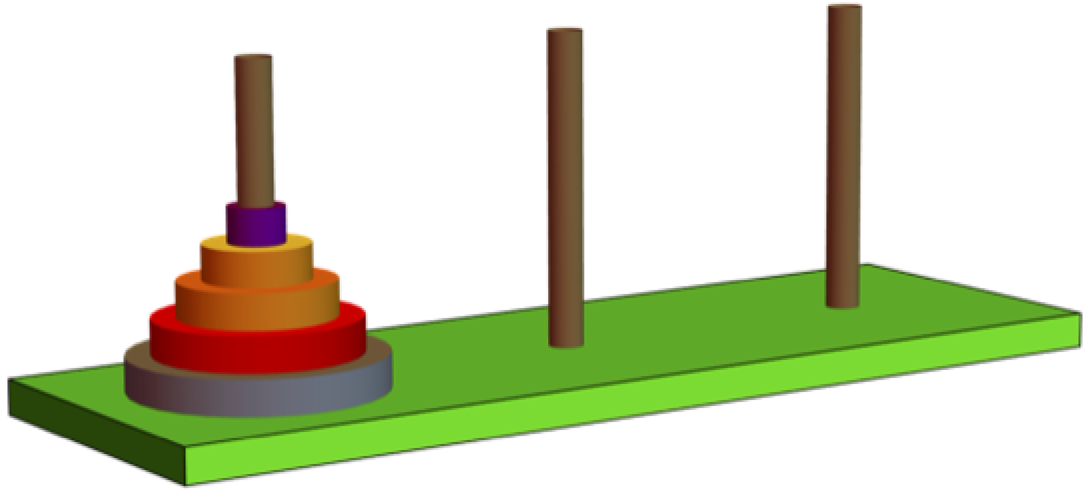
Recomenda-se a utilização de um jogo como nas figuras abaixo.
Caso não exista um jogo disponível, pode construir-se cada disco colando vários círculos de cartão, empilhando-os em três posições diferentes, uns ao lado dos outros. Os pinos não são absolutamente necessários. Uma alternativa é usar moedas de tamanhos diferentes.

Participantes:

O ideal é disponibilizar um jogo por pessoa. Também é possível ter um jogo por cada grupo de 2-3 pessoas, fazendo com que os jogadores discutam a estratégia a seguir.
Idade: A partir dos 6 anos.
Nota: Esta atividade é também adequada para pessoas invisuais.

Regras para jogar Torres de Hanoi:

São necessários *N* discos de tamanhos decrescentes e três pinos. *N* pode ser qualquer número, por exemplo 5 como na imagem abaixo.
No início, todos os discos se encontram num único pino, por exemplo o da esquerda, empilhados de baixo para cima, por tamanho decrescente.
O único movimento admissível consiste em mover o disco superior de um pino para outro pino, respeitando uma restrição: nenhum disco pode ser empilhado em cima de um disco mais pequeno. O objetivo do jogo é mover toda a torre do pino esquerdo para o pino direito.

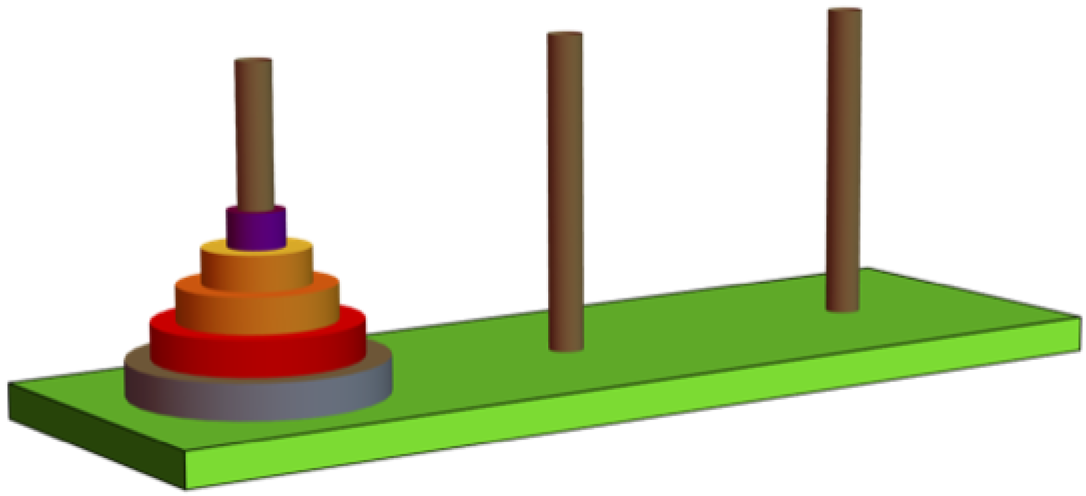


Tarefas possíveis:

1. Começa por jogar o jogo com três discos e move todos os discos do pino esquerdo para o pino direito. Qual é o número mínimo de movimentos?
2. Faz o mesmo com quatro discos e move todos os discos do pino da esquerda para o pino da direita. Qual é o número mínimo de movimentos?
3. Repete o mesmo com cinco discos e move todos os discos do pino esquerdo para o pino direito. Qual é o número mínimo de movimentos?
4. **(Esta pergunta é mais difícil e requer familiaridade com álgebra abstracta).**
   Será que consegues adivinhar o número mínimo de movimentos para um número *N* de discos?
   Sugestão: Seja a_N o número mínimo de movimentos para um total de *N* discos. Calcula a_N em função de a_{N-1}.

Torres de Hanoi - variante com movimentos entre pinos adjacentes:

Esta versão tem uma restrição adicional: um disco pode ser movido de um pino apenas para outro pino que lhe seja adjacente.



Tarefas possíveis:

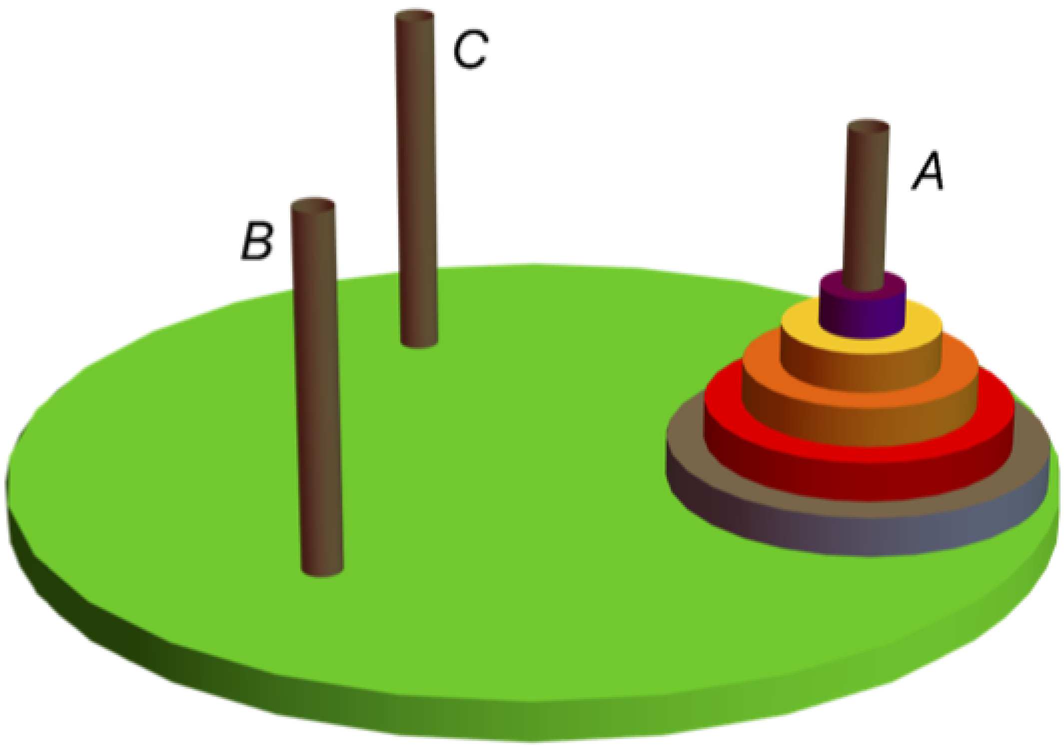
1. Começa por jogar o jogo com três discos e move todos os discos do pino mais à esquerda para o pino mais à direita. Qual é o número mínimo de movimentos?
2. Faz o mesmo com quatro discos e move todos os discos do pino mais à esquerda para o pino mais à direita. Qual é o número mínimo de movimentos?
3. **(Esta pergunta é mais difícil e requer familiaridade com álgebra abstracta).**
   Será que consegues adivinhar o número mínimo de movimentos para um número *N* de discos? Sugestão: Seja b_N o número mínimo de movimentos para um total de *N* discos. Calcula b_N em função de b_{N-1}.

Discussão em grupo:

Neste momento, podes organizar uma discussão em grupo antes de seguir para as próximas atividades. Pede aos intervenientes que expliquem o procedimento geral (bem como as suas ideias para encontrar a fórmula).

Torres de Hanoi cíclicas:

Os três pinos estão agora nos vértices de um triângulo, e um disco só pode ser movido de um pino para o pino seguinte no sentido dos ponteiros do relógio. Sejam A, B e C os três pinos, colocados no sentido dos ponteiros do relógio.

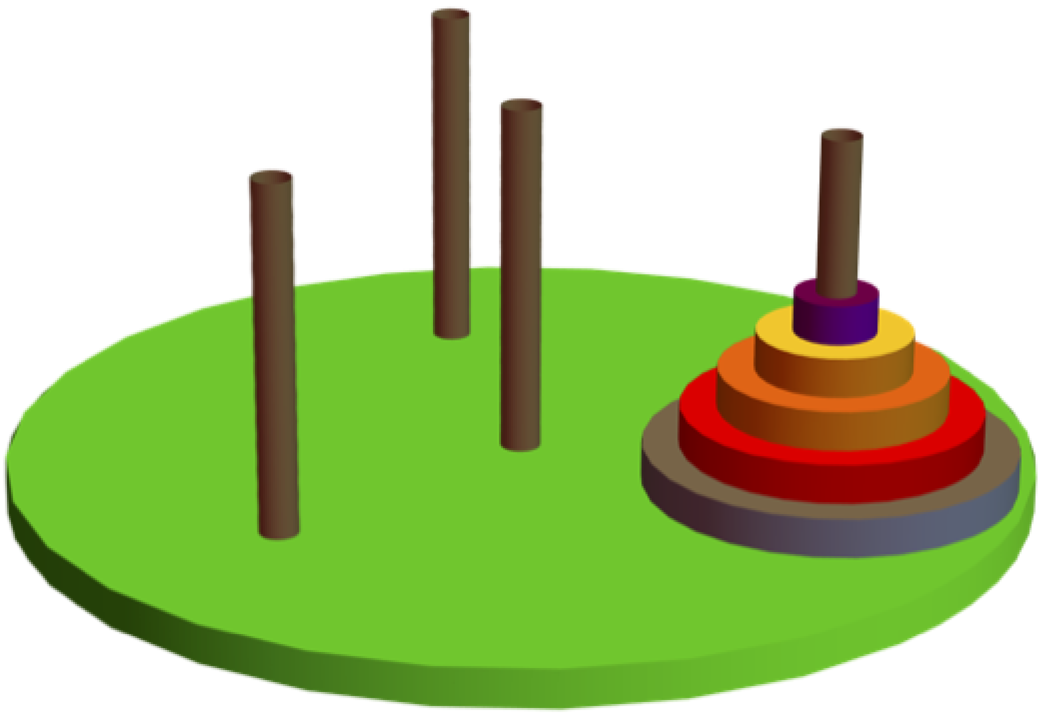


Tarefas possíveis:

1. Joga o jogo com três discos e move todos os discos de A para B. Qual é o número mínimo de movimentos?
2. Faz o mesmo com quatro discos e move todos os discos de A para B. Qual é o número mínimo de movimentos?
3. Joga o jogo com três discos e move todos os discos de A para C. Qual é o número mínimo de movimentos?
4. Repete o mesmo com quatro discos e move todos os discos de A para C. Qual é o número mínimo de movimentos?

Torres de Stockmeyer:

Sejam *N* discos de tamanhos decrescentes e quatro pinos.
Três pinos estão localizados nos vértices de um triângulo e chamam-se *pinos laterais*, o quarto pino está no centro do triângulo e chama-se *pino central.* No início, todos os discos são empilhados por tamanhos decrescentes, de baixo para cima, num dos pinos laterais.



Os únicos movimentos admissíveis são mover um disco do cimo de um pino lateral para o pino central ou do pino central para um pino lateral e - tal como no jogo das Torres de Hanói - respeitar a restrição de que nenhum disco pode ser empilhado em cima de um disco mais pequeno.

Tarefas possíveis:

1. Começa com dois discos e move todos os discos de um pino lateral para outro pino lateral. É possível provar que o número mínimo de movimentos é 6. Consegues fazê-lo?
2. Faz o mesmo com três discos e move todos os discos de um pino lateral para outro pino lateral. É possível provar que o número mínimo de movimentos é 12. Consegues fazê-lo?

3. Repete o mesmo com quatro discos e move todos os discos de um pino lateral para outro pino lateral. É possível provar que o número mínimo de movimentos é 20. Consegues fazê-lo?
4. Repete o mesmo com cinco discos e move todos os discos de um pino lateral para outro pino lateral. É possível provar que o número mínimo de movimentos é 32. Consegues fazê-lo?

Depois do jogo:

Discute as diferentes estratégias. Gostavas de inventar novas regras? Por exemplo, para um número *N* de discos, o aumento do número de pinos reduz o número mínimo de movimentos. Ou preferes criar um novo jogo?
Podes também ver o vídeo Numberphile video by Ayliean MacDonald, que dá a conhecer o jogo básico (incluindo uma versão em cartão sem pinos), mostra padrões interessantes, apresenta uma forma de criar música enquanto se resolve o jogo, entre outras ideias.

Criar e Partilhar!
Faz um vídeo de alguém a jogar o jogo muito rapidamente (o melhor é filmar a partir de uma posição elevada). Podes até querer acelerar o vídeo. Queres inventar novas regras? Partilha as tuas criações, os teus vídeos, as listas de reprodução, etc., usando a hashtag **#idm314hanoi** e **#idm314**

Referências:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Han%C3%B3i

Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle, Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). *Congr. Numer.* 102 (1994), 3–12.