



## Tours de Hanoï et tours de Stockmeyer

### Préparatifs :

Il est recommandé d'utiliser un jeu physique comme indiqué dans les figures ci-dessous. Si vous n'avez pas de jeu disponible, vous pouvez construire chaque disque en collant plusieurs disques en carton et en les empilant dans trois positions différentes les uns à côté des autres. Les bâtons autour desquels empiler les disques ne sont pas indispensables. Une alternative est d'utiliser des pièces de monnaie de différentes tailles.

### Participants :

Idéalement, ayez un jeu par personne. Il est également possible de prévoir un jeu par groupe de 2 ou 3 personnes et de faire discuter les joueurs sur la stratégie à adopter. Âge : à partir de 6 ans.

**Remarque : Cette activité convient également aux personnes aveugles.**

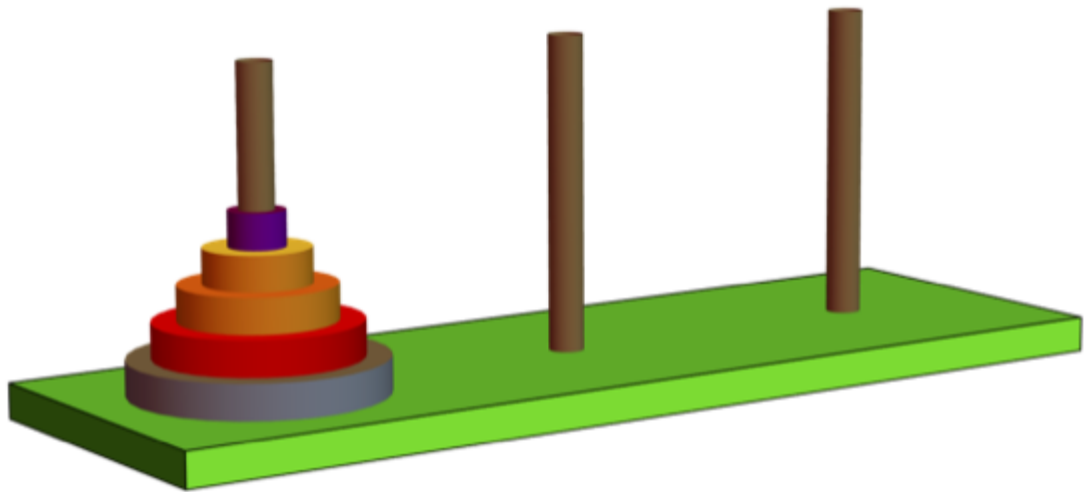
### Règles du jeu des tours de Hanoï :

Il y a  $N$  disques de tailles décroissantes et trois bâtons.  $N$  peut être n'importe quel nombre, par exemple 5 comme le montre l'image ci-dessous.

Au début, tous les disques sont empilés par tailles décroissantes de bas en haut sur un bâton.

Le seul mouvement admissible est de déplacer le disque supérieur d'un bâton à l'autre en respectant la contrainte qu'aucun disque ne peut être empilé sur un disque plus petit.

**Le but du jeu est de déplacer la tour du bâton gauche au bâton droit.**

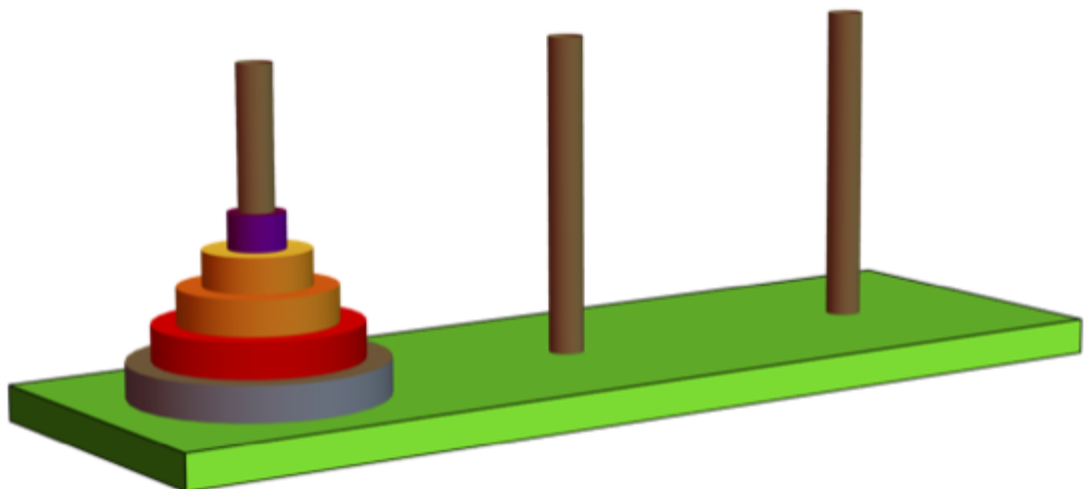


Tâches possibles :

1. Commencez avec trois disques et déplacez tous les disques du bâton gauche au bâton droit. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
2. Répétez l'opération avec quatre disques et déplacez tous les disques du bâton gauche vers le bâton droit. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
3. Répétez l'opération avec cinq disques et déplacez tous les disques du bâton gauche vers le bâton droit. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
4. **(Cette question est plus difficile et nécessite des connaissances en algèbre abstraite)**. Pouvez-vous deviner le nombre minimal de déplacements pour  $N$  disques ? Suggestion : Soit  $a_N$  le nombre minimal number de mouvements pour  $N$  disques. Calculer  $a_N$  en fonction de  $a_{N-1}$ .

**Variante des tours de tours de Hanoï avec mouvements à un bâton adjacent :**

On ajoute une contrainte supplémentaire selon laquelle un disque doit toujours être déplacé d'un bâton à un bâton adjacent.



Tâches possibles :

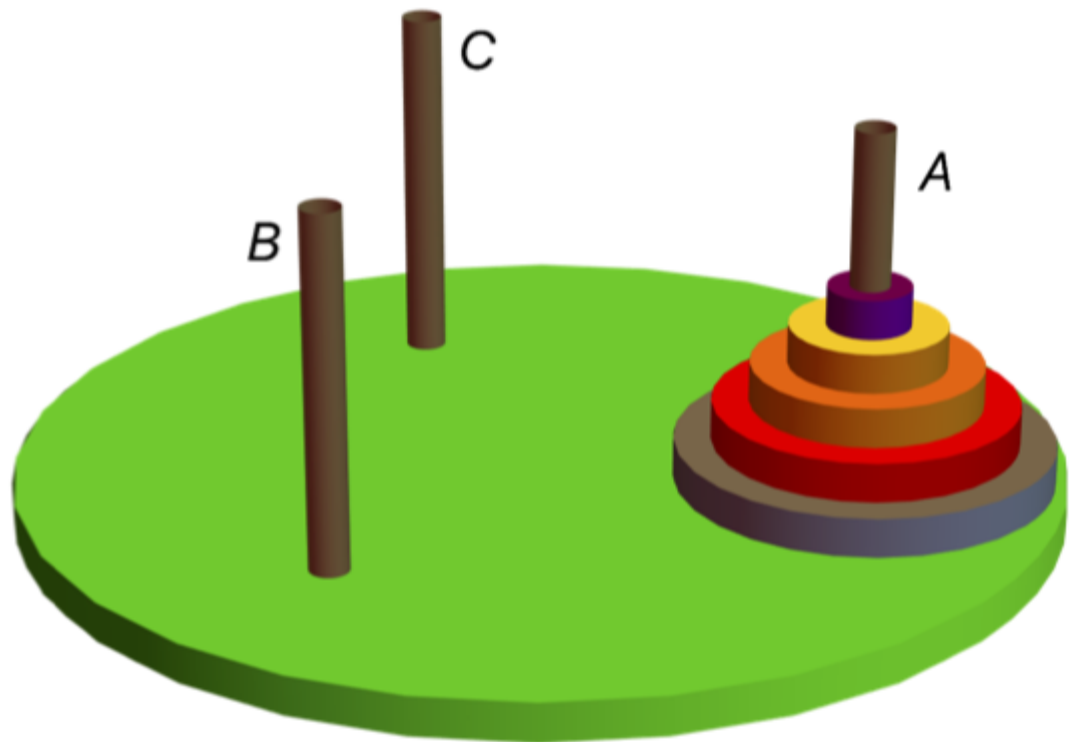
1. Commencez avec trois disques et déplacez tous les disques du bâton gauche au bâton droit. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
2. Répétez l'opération avec quatre disques et déplacez tous les disques du bâton gauche vers le bâton droit. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
3. **(Cette question est plus difficile et nécessite des connaissances en algèbre abstraite)**. Pouvez-vous deviner le nombre minimal de déplacements pour  $N$  disques ? Suggestion : Soit  $b_N$  le nombre minimal number de mouvements pour  $N$  disques. Calculer  $b_N$  en fonction de  $b_{N-1}$ .

#### Discussion de groupe :

Vous souhaitez peut-être avoir une discussion de groupe à ce stade avant de passer aux activités suivantes. Demandez aux joueurs d'expliquer la procédure générale (et leurs idées pour trouver la formule).

#### Tours de Hanoï cycliques:

Les trois bâtons se trouvent maintenant aux sommets d'un triangle, et un disque ne peut être déplacé vers le bâton suivant que dans le sens des aiguilles d'une montre. Soit A, B et C les trois bâtons dans le sens des aiguilles d'une montre.



Tâches possibles :

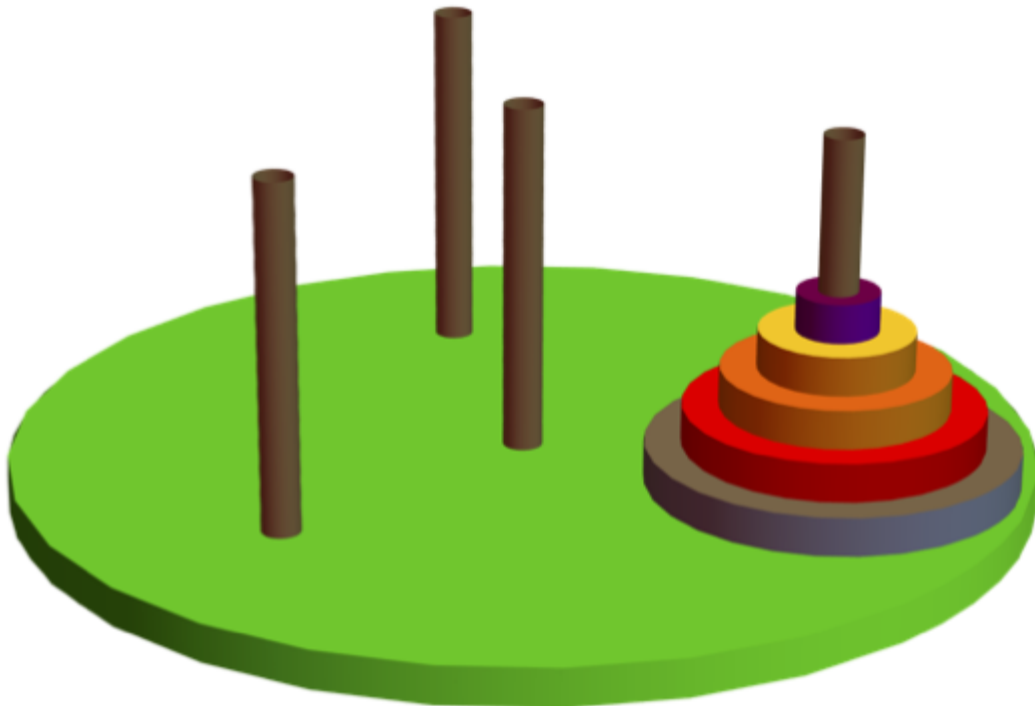
1. Jouez au jeu avec trois disques et déplacez tous les disques de A à B. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
2. Répétez le jeu avec quatre disques et déplacez tous les disques de A à B. Quel est le nombre minimal de déplacements ?

3. Jouez au jeu avec trois disques et déplacez tous les disques de A à C. Quel est le nombre minimal de déplacements ?
4. Répétez le jeu avec quatre disques et déplacez tous les disques de A à C. Quel est le nombre minimal de déplacements ?

### Tours de Stockmeyer :

Il y a  $N$  disques de tailles décroissantes et quatre bâtons.

Trois bâtons sont situés aux sommets d'un triangle et sont appelés *bâtons latéraux*, le quatrième bâton est au centre du triangle et est appelé *bâton central*. Au début, tous les disques sont empilés par tailles décroissantes de bas en haut sur un bâton latéral.



Les seuls mouvements autorisés sont le déplacement d'un disque supérieur d'un bâton latéral au bâton central ou du bâton central à un bâton latéral et - comme dans le jeu de la Tour de Hanoi - le respect de la contrainte selon laquelle aucun disque ne peut être empilé sur un disque plus petit.

Tâches possibles :

1. Commencez avec deux disques et déplacez tous les disques d'un bâton latéral à un autre bâton latéral. Il est prouvé que le nombre minimal de déplacements est de 6. Pouvez-vous le réaliser ?
2. Répétez l'opération avec trois disques et déplacez tous les disques d'un bâton latéral à un autre bâton latéral. Il est prouvé que le nombre minimal de déplacements est de 12. Pouvez-vous le réaliser ?

3. Répéter l'opération avec quatre disques et déplacer tous les disques d'un bâton latéral à un autre bâton latéral. Il est prouvé que le nombre minimal de déplacements est de 20. Pouvez-vous le réaliser ?
4. Répéter l'opération avec cinq disques et déplacer tous les disques d'un bâton latéral à un autre bâton latéral. Il est prouvé que le nombre minimal de déplacements est de 32. Pouvez-vous le réaliser ?

### Après le jeu :

Discutez des différentes stratégies. Voulez-vous inventer de nouvelles règles ? Par exemple, l'augmentation du nombre de bâtons réduit le nombre minimum de coups pour  $N$  disques. Ou voulez-vous créer un nouveau jeu ?

Vous pouvez également consulter la [vidéo Numberphile d'Aylylean MacDonald](#), qui présente le jeu de base (y compris une version en carton sans bâtons), présente un moyen de créer de la musique tout en résolvant le jeu, des modèles intéressants et d'autres idées sympas.

### Créez et partagez !

Prenez la vidéo d'une personne jouant au jeu très rapidement (de préférence depuis une position surélevée). Vous pouvez même accélérer la vidéo. Pouvez-vous inventer de nouvelles règles ? Partagez vos créations, vidéos, playlists etc, en utilisant les hashtag **#idm314hanoi** et **#idm314**.

Références:

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Tours\\_de\\_Hano%C3%AF](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tours_de_Hano%C3%AF)

[Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle](#), Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). *Congr. Numer.* [102 \(1994\)](#), 3–12.

© 2022 Christiane Rousseau

Cette œuvre est soumise à une licence [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#).