



Οι πύργοι του Ανόι και ο πύργος του Στοκμάγιερ

Προετοιμασία:

Προτείνεται η χρήση ενός φυσικού παιχνιδιού όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει διαθέσιμο παιχνίδι, μπορείτε να κατασκευάσετε κάθε δίσκο κολλώντας αρκετούς κύκλους από χαρτόνι μεταξύ τους και στοιβάζοντάς τους σε τρεις διαφορετικές θέσεις τον έναν δίπλα στον άλλο. Οι κάθετοι ράβδοι δεν είναι απαραίτητοι. Μια εναλλακτική λύση είναι να χρησιμοποιήσετε νομίσματα διαφορετικών μεγεθών.

Συμμετέχοντες:

Ιδανικά, δώστε ένα παιχνίδι ανά άτομο. Είναι επίσης δυνατό να έχετε ένα παιχνίδι ανά ομάδα 2-3 ατόμων και να αφήσετε τους παίκτες να συζητήσουν τη στρατηγική.

Ηλικία: Από 6 ετών και άνω.

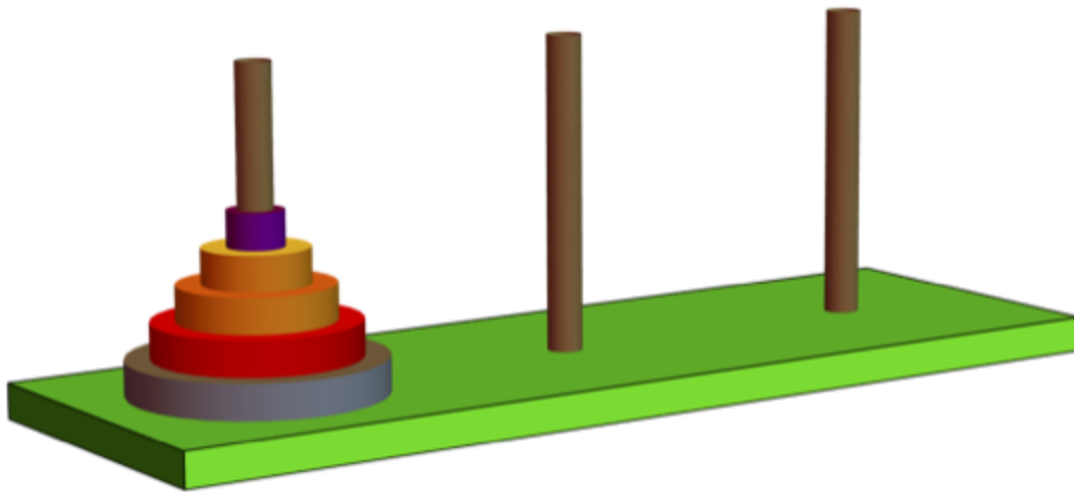
Σημείωση: Αυτή η δραστηριότητα είναι επίσης κατάλληλη για άτομα που είναι τυφλά.

Κανόνες για το παιχνίδι των Πύργων του Ανόι:

Υπάρχουν N δίσκοι φθίνοντος μεγέθους και τρεις κάθετοι ράβδοι. Το N μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός, για παράδειγμα 5 όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

Στην αρχή, όλοι οι δίσκοι στοιβάζονται σε φθίνοντα μεγέθη από κάτω προς τα πάνω σε μία ράβδο.

Η μόνη επιτρεπτή κίνηση είναι η μετακίνηση του κορυφαίου δίσκου από μια ράβδο σε μια άλλη ράβδο, τηρώντας τον περιορισμό ότι κανένας δίσκος δεν μπορεί να στοιβαχτεί πάνω σε δίσκο μικρότερης ακτίνας. Ο στόχος του παιχνιδιού είναι να μετακινήσετε τον πύργο, δηλαδή όλους τους δίσκους, από την αριστερή ράβδο στη δεξιά.

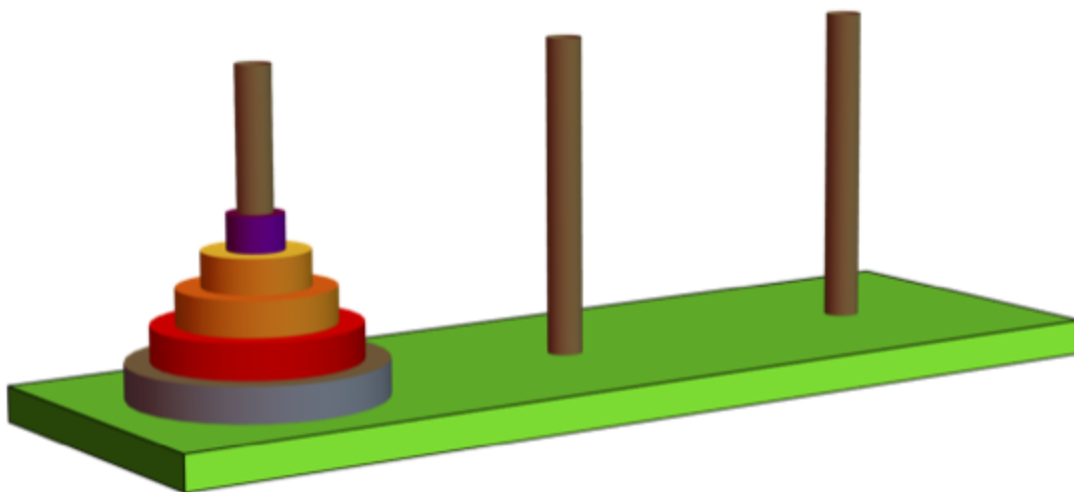


Πιθανές εργασίες:

1. Ξεκινήστε με τρεις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από την αριστερή ράβδο στη δεξιά. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
2. Επαναλάβετε το ίδιο με τέσσερις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από την αριστερή ράβδο στη δεξιά. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
3. Επαναλάβετε το ίδιο με πέντε δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από την αριστερή ράβδο στη δεξιά. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
4. **(Αυτή η ερώτηση είναι πιο δύσκολη και απαιτεί εξοικείωση με την αφηρημένη άλγεβρα).** Μπορείτε να μαντέψετε τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων για N δίσκους; Πρόταση: Έστω a_N ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων για N δίσκους. Υπολογίστε το a_N ως συνάρτηση του a_{N-1} .

Παραλλαγή των πύργων του Ανόι με μετακινήσεις σε γειτονικές ράβδους:

Υπάρχει ένας πρόσθετος περιορισμός ότι ένας δίσκος πρέπει πάντα να μετακινείται από μία ράβδο προς την γειτονική της.



Πιθανές εργασίες:

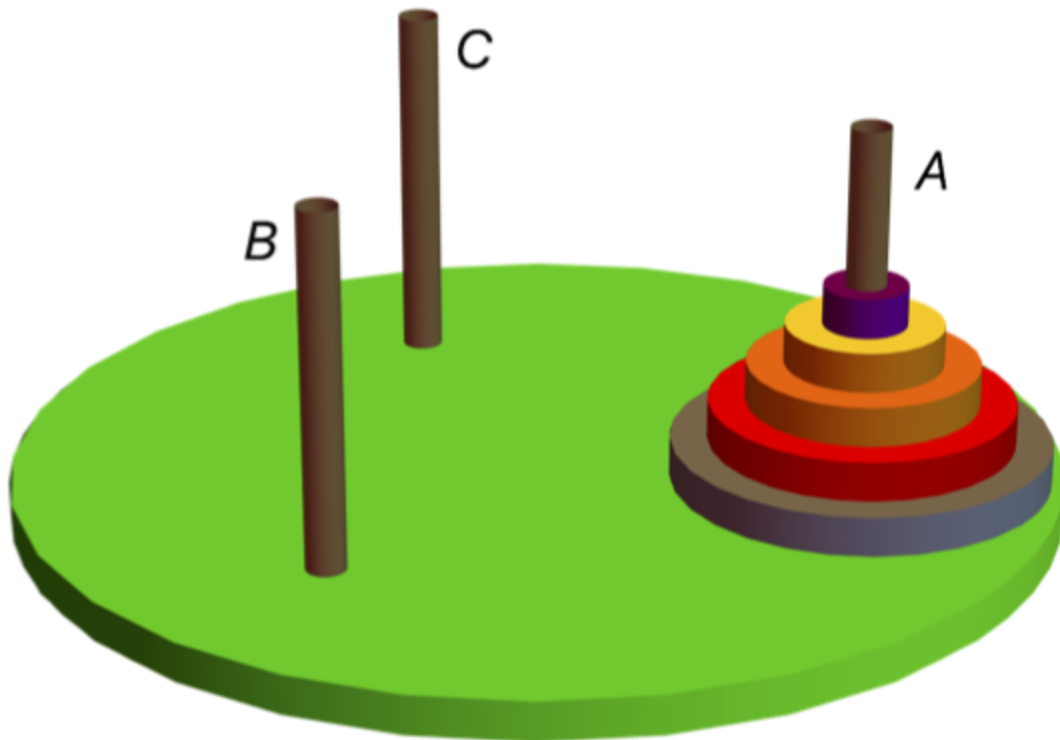
1. Παίξτε το παιχνίδι με τρεις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από την αριστερή ράβδο προς την δεξιά. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
2. Επαναλάβετε το ίδιο με τέσσερις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από την αριστερή ράβδο προς την δεξιά. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
3. **(Αυτή η ερώτηση είναι πιο δύσκολη και απαιτεί εξοικείωση με την αφηρημένη άλγεβρα).** Μπορείτε να μαντέψετε τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων για N δίσκους; Πρόταση: Έστω b_N ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων για N δίσκους. Υπολογίστε το b_N ως συνάρτηση του b_{N-1} .

Συζήτηση στην ομάδα:

Μπορεί να θέλετε να κάνετε μια ομαδική συζήτηση σε αυτό το σημείο πριν προχωρήσετε στις επόμενες δραστηριότητες. Ζητήστε από τους παίκτες να εξηγήσουν τη γενική διαδικασία (και τις σκέψεις τους σχετικά με την εύρεση του τύπου).

Κυκλικός πύργος του Ανόι:

Οι τρεις ράβδοι βρίσκονται τώρα στις κορυφές ενός τριγώνου και ένας δίσκος μπορεί να μετακινηθεί στην επόμενη ράβδο μόνο με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Έστω A, B και C οι τρεις ράβδοι με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.



Πιθανές εργασίες:

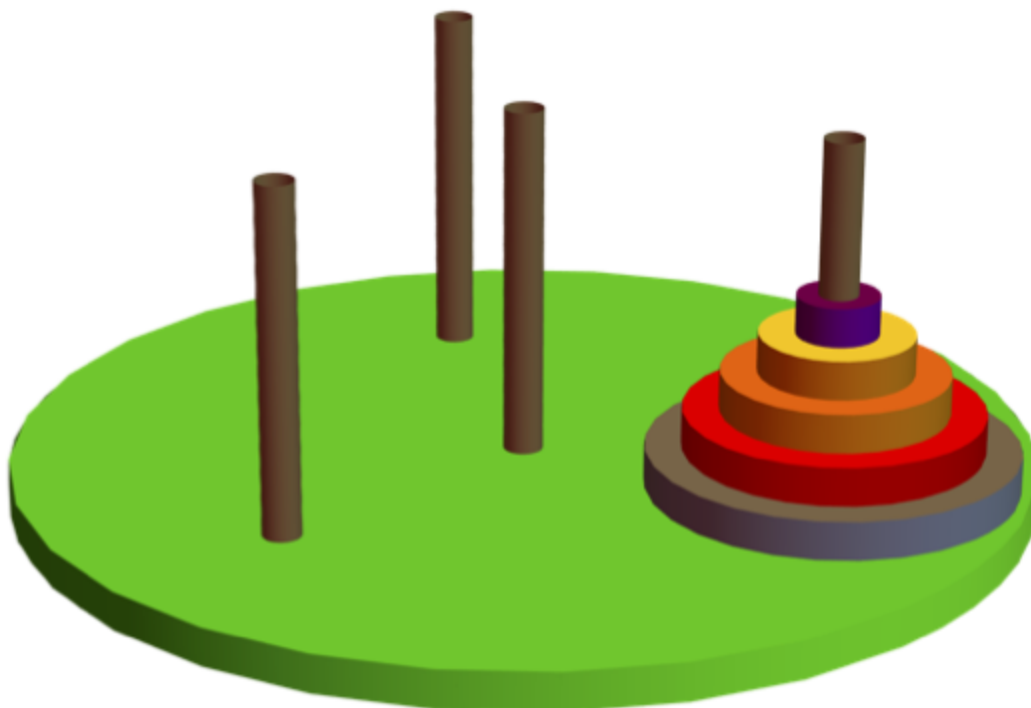
1. Παίξτε το παιχνίδι με τρεις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από το A στο B. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
2. Επαναλάβετε το ίδιο με τέσσερις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από το A στο B. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;

3. Παίξτε το παιχνίδι με τρεις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από το A στο C. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;
4. Επαναλάβετε το ίδιο με τέσσερις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από το A στο C. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων;

Πύργος του Στοκμάγιερ:

Υπάρχουν N δίσκοι φθίνοντος μεγέθους και τέσσερις ράβδοι.

Τρεις ράβδοι βρίσκονται στις κορυφές ενός τριγώνου και ονομάζονται πλευρικές ράβδοι, η τέταρτη ράβδος βρίσκεται στο κέντρο του τριγώνου και ονομάζεται κεντρική ράβδος. Στην αρχή, όλοι οι δίσκοι στοιβάζονται σε φθίνοντα μεγέθη από κάτω προς τα πάνω σε μια πλευρική ράβδο.



Οι μόνες επιτρεπτές κινήσεις είναι να μετακινήσετε τον κορυφαίο δίσκο από μία πλευρική ράβδο προς την κεντρική ράβδο ή από την κεντρική προς τις πλευρικές και - όπως και στο παιχνίδι -Πύργοι του Ανόι - να τηρήσετε τον περιορισμό ότι κανένας δίσκος δεν μπορεί να στοιβαχτεί πάνω σε έναν δίσκο μικρότερης ακτίνας.

Πιθανές εργασίες:

1. Ξεκινήστε με δύο δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από μία πλευρική ράβδο σε άλλη πλευρική ράβδο. Έχει αποδειχθεί ότι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι 6. Μπορείτε να το πετύχετε;
2. Επαναλάβετε το ίδιο με τρεις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από μία πλευρική ράβδο σε άλλη πλευρική ράβδο. Αποδεικνύεται ότι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι 12. Μπορείτε να το πετύχετε;

3. Επαναλάβετε το ίδιο με τέσσερις δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από μία πλευρική ράβδο σε άλλη πλευρική ράβδο. Αποδεικνύεται ότι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι 20. Μπορείτε να το πετύχετε;
4. Επαναλάβετε το ίδιο με πέντε δίσκους και μετακινήστε όλους τους δίσκους από από μία πλευρική ράβδο σε άλλη πλευρική ράβδο. Αποδεικνύεται ότι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι 32. Μπορείτε να το πετύχετε;

Μετά το παιχνίδι:

Συζητήστε τις διαφορετικές στρατηγικές. Θέλετε να επινοήσετε νέους κανόνες; Για παράδειγμα, η αύξηση του αριθμού των ράβδων μειώνει τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων για N δίσκους. Ή μήπως θέλετε να δημιουργήσετε ένα νέο παιχνίδι;

Μπορείτε επίσης να δείτε το βίντεο [Numberphile του Aylean MacDonald](#), που παρουσιάζει το βασικό παιχνίδι (συμπεριλαμβανομένης μιας έκδοσης από χαρτόνι χωρίς μπαστούνια), παρουσιάζει έναν τρόπο να δημιουργείτε μουσική ενώ λύνετε το παιχνίδι, ενδιαφέροντα μοτίβα και άλλες δροσερές ιδέες.

Ανατρέξτε στην ιστοσελίδα του φωτόδεντρου για τον [πύργο του Ανόι](#)

Δημιουργήστε και μοιραστείτε!

Τραβήξτε ένα βίντεο με κάποιον που παίζει το παιχνίδι πολύ γρήγορα (καλύτερα από μια υπερυψωμένη θέση). Μπορεί ακόμη και να θέλετε να επιταχύνετε το βίντεο. Μπορείτε να επινοήσετε νέους κανόνες; Μοιραστείτε τις δημιουργίες σας, τα βίντεο, τις λίστες αναπαραγωγής κ.λπ. χρησιμοποιώντας τα hashtag **#idm314hanoi** και **#idm314**.

Παραπομπή:

[Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle](#), Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). Congr. Numer. 102 (1994), 3-12.

© 2022 Christiane Rousseau

Το παρόν έργο διατίθεται με άδεια χρήσης [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#).