



## برجا هانوي و ستوكماير

### الإستعدادات:

يستحسن استخدام لعبة جاهزة كما هو موضح في الأشكال أسفله. يمكن إنشاء اللعبة، في حالة عدم توفرها، بتشكيل الأقراص (الأسطوانات) عن طريق لصق عدة رقائق دائرية من الورق المقوى، ومن ثم تصفيفها عموديا في ثلاثة مواضع متجاورة. الأعمدة ليست مطلوبة بالضرورة. كما يمكن أيضا استعمال النقود المعدنية بأحجام مختلفة كبديل.

### المشاركون

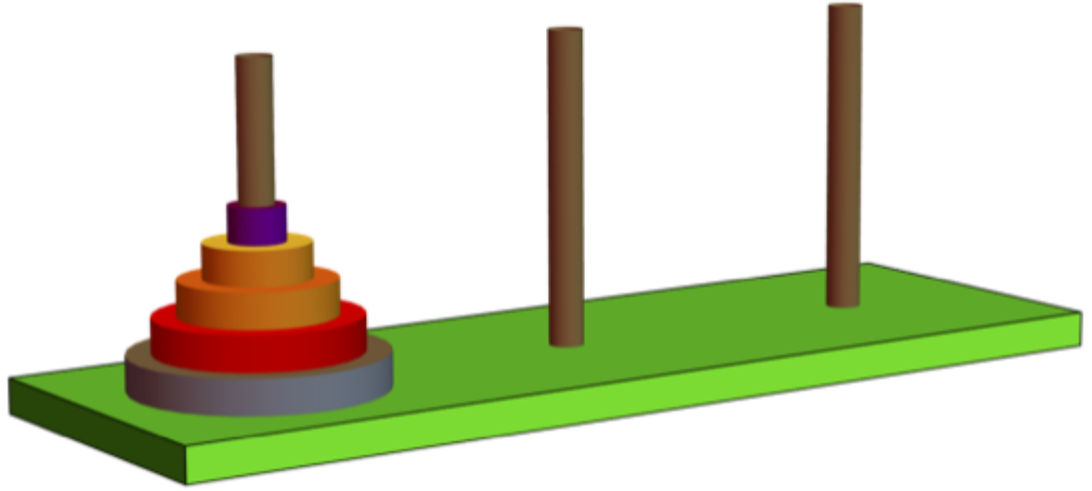
من الأفضل أن تتوفر لكل شخص لعبة. كما يمكن أيضا أن تتشارك مجموعة مكونة من شخصين أو ثلاث في لعبة واحدة، مناقشين استراتيجية اللعب. العمر: ابتداء من 6 سنوات. ملاحظة: من الممكن أيضا للأشخاص ذوي الهمم (المكفوفين) القيام بهذا النشاط.

### قواعد لعبة برج هانوي:

هناك ثلاث عصي وعدد من الأقراص (أو أسطوانات مجوفة) ذات أحجام متناقصة. ليكن  $N$  عدد الأقراص، على سبيل المثال 5 أقراص كما في الصورة أدناه.

في البداية، يتم رص جميع الأقراص على عصا واحدة بشكل تنازلي من الأسفل إلى الأعلى.

يسمح القيام بحركة واحدة فقط، وهي تحريك القرص العلوي من عصا إلى عصا أخرى مع التقيّد بعدم إمكانية وضع أي قرص فوق قرص أصغر حجما منه. الهدف من اللعبة هو تحريك البرج من العصا اليمنى إلى العصا اليسرى.

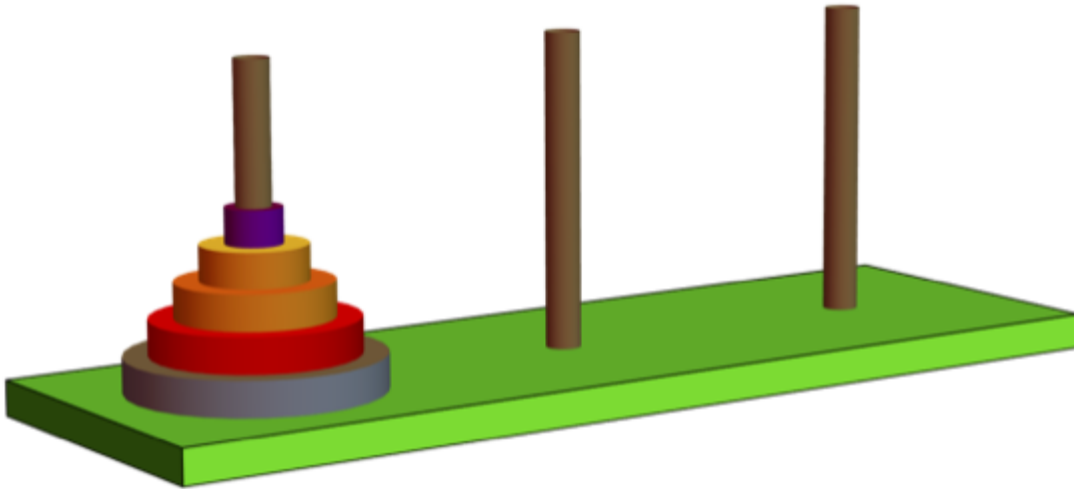


العمليات الممكنة:

1. إبدأ بثلاث أقراص و انقل جميع الأقراص من العصا اليمنى إلى العصا اليسرى. ما هو أقل عدد من الحركات؟
2. كرر نفس العملية باستخدام أربع أقراص و حرك جميع الأقراص من العصا اليمنى إلى العصا اليسرى. ما هو أقل عدد من الحركات؟
3. كرر نفس العملية باستخدام خمس أقراص و انقل جميع الأقراص من العصا اليمنى إلى العصا اليسرى. ما هو أقل عدد من الحركات؟
4. (هذا السؤال أكثر صعوبة ويتطلب الإلمام بالجبر المجرد) هل يمكنك تخمين أقل عدد من الحركات للعبة باستخدام  $N$  قرص؟ تلميح: ليكن الحد الأدنى لعدد الحركات باستخدام  $N$  قرص  $a_N$  بحسب  $a_N$  بدلالة  $a_{N-1}$

برج هانوي متقدم - النقل إلى العصا المجاورة:

هناك قيد إضافي يتمثل في إلزامية نقل قرص ما من عصا إلى العصا المجاورة.



## العمليات الممكنة:

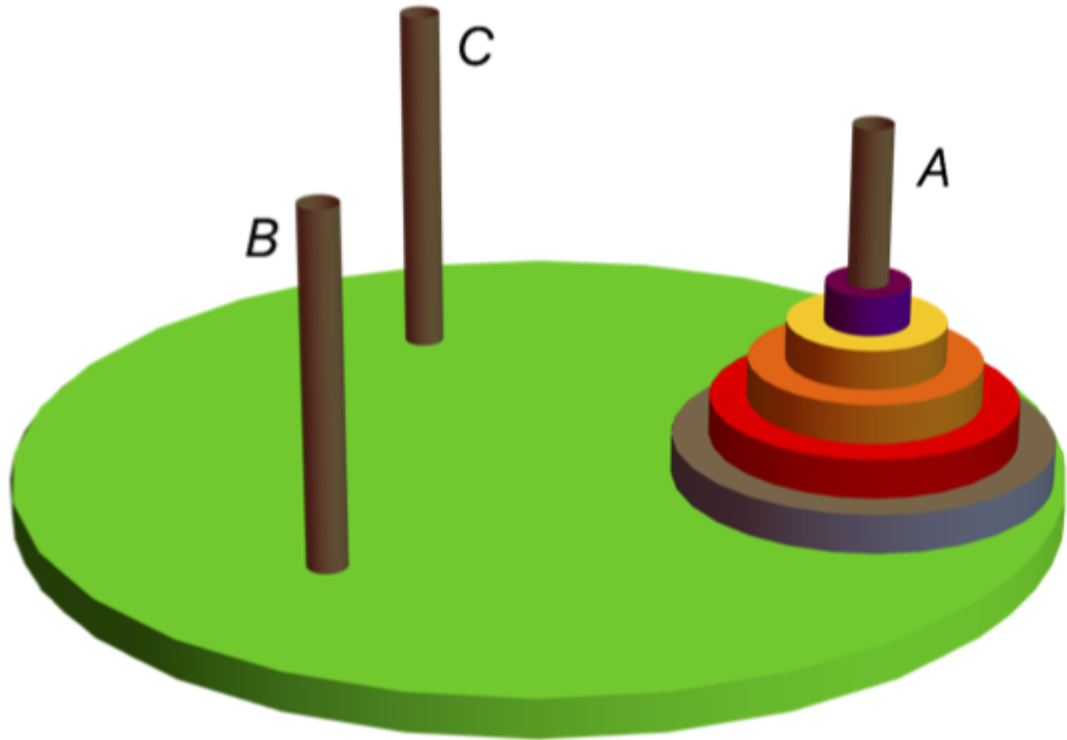
1. إبدأ بثلاث أقراص و انقل جميع الأقراص من العصا اليمنى إلى العصا اليسرى. ما هو أقل عدد من الحركات؟
2. كرر نفس العملية باستخدام أربع أقراص و انقل جميع الأقراص من العصا اليمنى إلى العصا اليسرى. ما هو أقل عدد من الحركات؟
3. (هذا السؤال أكثر صعوبة ويتطلب الإلمام بالجبر المجرد) هل يمكنك تخمين أقل عدد من الحركات للعبة باستخدام  $N$  قرص؟ تلميح: ليكن الحد الأدنى لعدد الحركات باستخدام  $N$  قرص  $b_N$  احسب  $b_N$  بدلالة  $b_{N-1}$

## مناقشة جماعية:

قد ترغب في إجراء مناقشة جماعية في هذه المرحلة قبل الانتقال إلى الأنشطة التالية. اطلب من اللاعبين شرح الإجراء العام (وأفكارهم حول إيجاد الصيغة).

## برج هانوي الدوري:

في هذه الحالة، العصي الثلاث تمثل رؤوس مثلث. لا يمكن نقل قرص إلا إلى العصا الموالية وفق اتجاه عقارب الساعة. لنفرض أن  $A$ ،  $B$  و  $C$  هي العصي الثلاث بالترتيب وفق اتجاه عقارب الساعة.



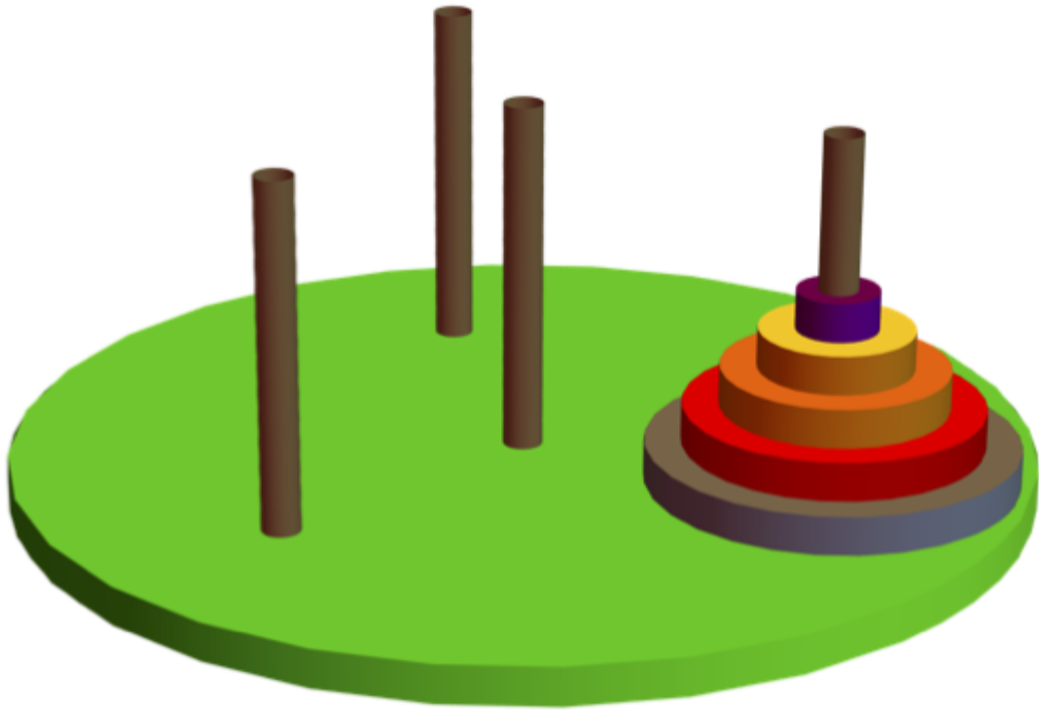
## العمليات الممكنة:

1. جرب اللعبة باستعمال ثلاث أقراص و انقل جميع الأقراص من A إلى B. ما هو أقل عدد من الحركات؟
2. كرر نفس العملية باستخدام أربع أقراص و انقل جميع الأقراص من A إلى B. ما هو أقل عدد من الحركات؟
3. جرب اللعبة باستعمال ثلاث أقراص و انقل جميع الأقراص من A إلى C. ما هو أقل عدد من الحركات؟
4. كرر نفس العملية باستخدام أربع أقراص و انقل جميع الأقراص من A إلى C. ما هو أقل عدد من الحركات؟

## برج ستوكماير

هناك N قرص ذات أحجام متناقصة وأربع عصي.

تمثل ثلاث عصي رؤوس مثلث وتسمى العصي الجانبية، أما العصا الرابعة فتقع في وسط المثلث و تسمى العصا المركزية. في البداية، يتم رص جميع الأقراص على عصا جانبية واحدة بشكل تنازلي من الأسفل إلى الأعلى.



يسمح القيام بحركة واحدة فقط، وهي تحريك قرص علوي من عصا جانبية إلى العصا المركزية أو من العصا المركزية إلى عصا الجانبية - كما هو الحال في لعبة برج هانوي - مع التقيّد بعدم إمكانية وضع أي قرص فوق قرص أصغر حجماً منه.

## العمليات الممكنة:

1. إبدأ اللعبة باستعمال قرصين ونقلهما من عصا جانبية إلى عصا جانبية أخرى. تم إثبات أن أقل عدد من الحركات هو 6. هل يمكنك التحقق من ذلك؟
2. كرر نفس العملية باستخدام ثلاث أقراص و انقل جميع الأقراص من عصا جانبية إلى عصا جانبية أخرى. تم إثبات أن أقل عدد من الحركات هو 12. هل يمكنك التحقق من ذلك؟

3. كرر نفس العملية باستخدام أربع أقراص وانقل جميع الأقراص من عصا جانبية إلى عصا جانبية أخرى. تم إثبات أن أقل عدد من الحركات هو 20. هل يمكنك التحقق من ذلك؟
4. كرر نفس العملية باستخدام خمس أقراص وانقل جميع الأقراص من عصا جانبية إلى عصا جانبية أخرى. تم إثبات أن أقل عدد من الحركات هو 32. هل يمكنك التحقق من ذلك؟

### ما بعد اللعبة

ناقش الاستراتيجيات المختلفة. هل ترغب في إصدار قواعد جديدة؟ على سبيل المثال: تؤدي زيادة عدد العصي إلى تقليل الحد الأدنى لعدد حركات N قرص. أم تريد إنشاء لعبة جديدة؟

يمكنك أيضاً مشاهدة الفيديو: [Numberphile video by Aylean MacDonald](#) ، والذي يقدم اللعبة القاعدية (بما في ذلك إنشاء اللعبة من الورق المقوى بدون عصي)، و يقدم أيضاً طريقة لتأليف موسيقى أثناء حل اللعبة، إضافة إلى أنماط مثيرة للاهتمام، وأفكار أخرى رائعة.

### أنشىء وشارك!

التقط مقطع فيديو لشخص يُجري اللعبة بسرعة كبيرة (يفضّل أن يكون التصوير من الأعلى). قد ترغب حتى في تسريع الفيديو. هل يمكنك إصدار قواعد جديدة؟ شارك إبداعاتك ومقاطع الفيديو وقوائم التشغيل وما إلى ذلك ، عن طريق الهاشتاج

#idm314 و #idm314hanoi

### المراجع:

[Variations of the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle](#), Paul K. Stockmeyer, Proceedings of the Twenty-fifth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1994). *Congr. Numer.* [102 \(1994\)](#), 3–12.

© كريستيان روسو 2022 Christiane Rousseau

هذا العمل مرخص بموجب [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#)