DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA
14 DE MARÇO

Poliedros Artísticos

Participantes:

A partir dos 14 anos, dependendo da atividade.
Não é necessário nenhum conhecimento prévio de Matemática, mas à medida que avança nas atividades, poderá precisar de aplicar conceitos matemáticos tais como polígonos, polígonos regulares e poliedros, bem como utilizar conhecimentos básicos tais como a soma dos ângulos de um triângulo, a proporção áurea, construções geométricas básicas ou coordenadas cartesianas.

Materiais:

Para os modelos físicos, são usados palitos de madeira e elásticos. Como opção, os palitos podem ser coloridos com tinta. Em algumas construções, poderá ser útil criar os poliedros com fio para evitar o emaranhamento dos palitos. Também pode construir poliedros usando cartolina colorida.

Algumas das imagens podem ser projetadas na sala de aula pelo professor. Além disso, algumas atividades incluem links para animações e apps interativas online.

1. Poliedros regulares.

Questões preliminares:

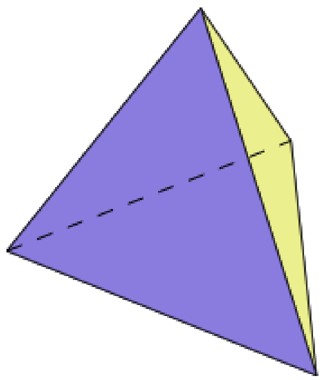
O que é um *poliedro*?

- É um sólido tridimensional limitado por faces planas. As *faces* são polígonos (cada uma num plano).
- Os segmentos de reta onde duas faces se encontram são chamados *arestas*.
- Os pontos onde três ou mais faces se encontram são chamados *vértices*.

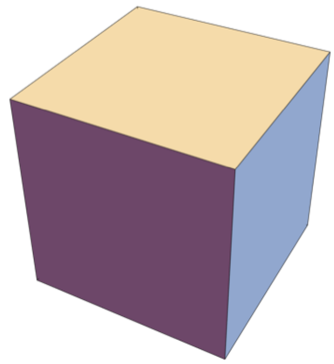
O que é um *poliedro regular*?

- As faces são *polígonos regulares* iguais entre si. (Um polígono é regular se todos os seus lados têm o mesmo comprimento e se todos os seus ângulos são iguais.)
- E cada vértice é adjacente ao mesmo número de faces.
- E o poliedro é *convexo*.

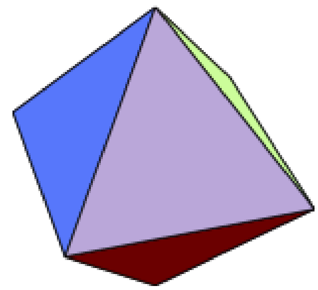
Os cinco poliedros regulares:



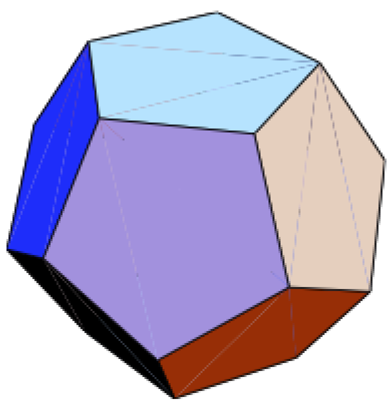
Tetraedro



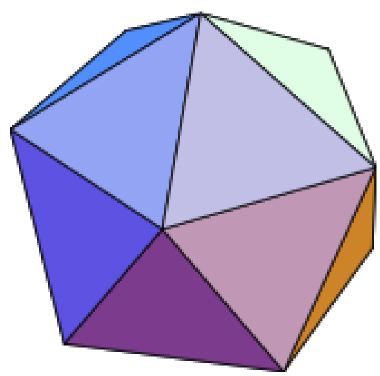
Cubo (Hexaedro)



Octaedro



Dodecaedro

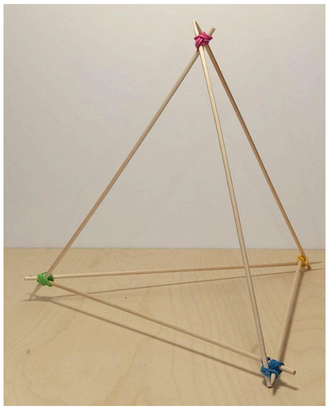
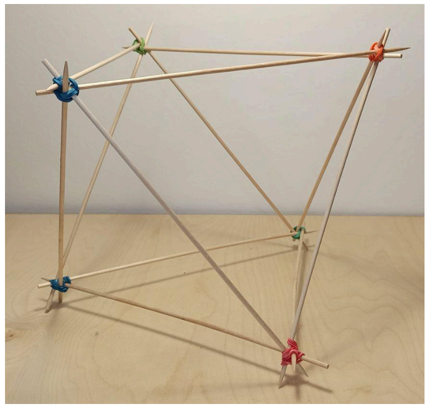
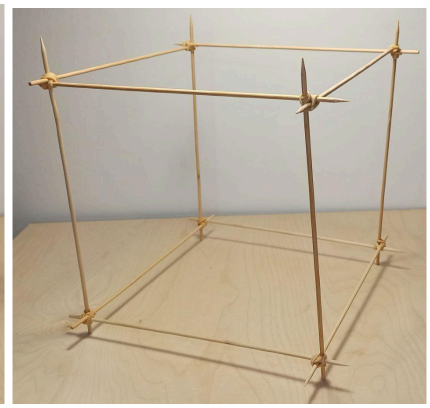


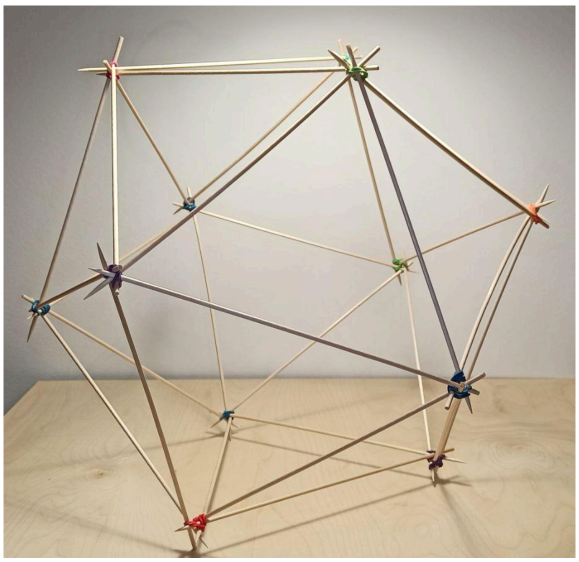
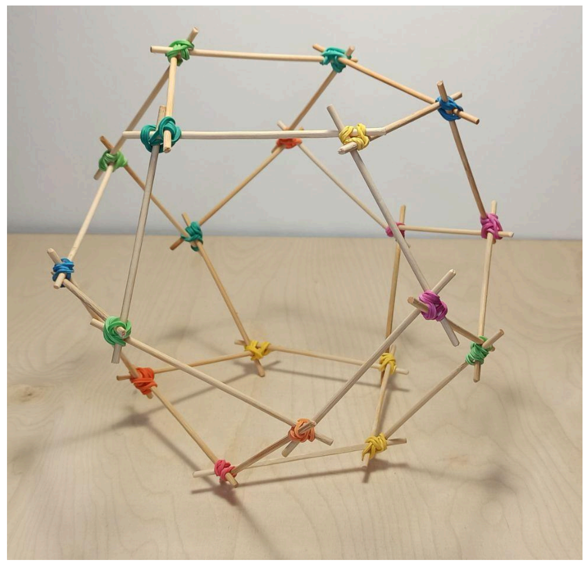
Icosaedro

Estes são os cinco únicos poliedros regulares, também conhecidos como Sólidos Platónicos. (clique nos links para manipular os poliedros).

A partir das figuras e do número e tipo de faces, deduza o número de arestas e vértices (i.e. de quantos palitos de madeira e elásticos precisará) e construa os cinco poliedros regulares.

Poliedros regulares	Tipo de faces	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
Icosaedro	triângulo	20	12	30
Octaedro	triângulo	8	6	12
Tetraedro	triângulo	4	4	6
Cubo	quadrado	6	8	12
Dodecaedro	pentágono	12	20	30

Observe a relação de Euler:

$$F + V = A + 2$$

em que F, V e A são o número de faces, vértices e arestas respetivamente.
Observe ainda que existe uma relação estreita entre:

- O octaedro e o cubo.
- O icosaedro e o dodecaedro.
- O tetraedro e o próprio tetraedro.

(Compare o número de vértices, arestas e faces para cada um destes pares de poliedros)

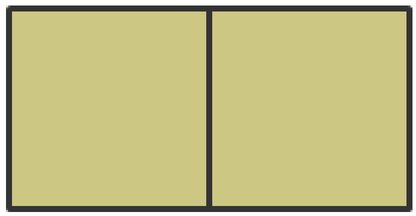
São chamados *duais*: os vértices de um correspondem às faces do outro e vice-versa. Pode obtê-los colocando os vértices de um nos centros das faces do outro. Para cada poliedro, há uma correspondência entre cada aresta e uma outra do seu dual: é possível obter uma delas a partir da outra por uma rotação de 90º (em torna da reta que passa pelo ponto médio da aresta e pelo centro do poliedro).

Só cinco poliedros regulares

Vamos provar que há só cinco poliedros regulares. Pode usar papel ou cartolina e fita adesiva para construir as figuras que intervêm no raciocínio feito abaixo.

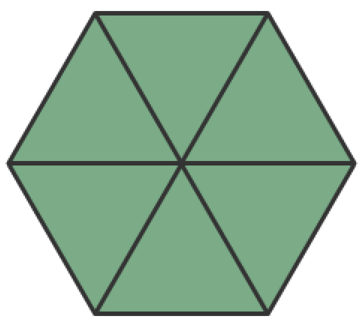
Sabemos que, num poliedro regular, todas as faces são polígonos regulares iguais, seja **n** o número de faces que se juntam num vértice.

Etapa 1: Se $n=2$, explique por que não é possível construir nenhum tipo de poliedro.



Etapa 2: Já sabemos que $n \geq 3$. Vamos tentar construir todos os poliedros regulares possíveis, começando por usar triângulos equiláteros.

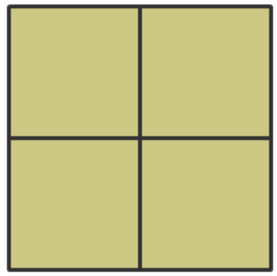
- Se $n = 3$, é possível construir um poliedro regular? Se possível, construa-o unindo 3 triângulos em cada vértice.
- Se $n = 4$, é possível construir um poliedro regular? Se possível, construa-o unindo 4 triângulos em cada vértice.
- Se $n = 5$, é possível construir um poliedro regular? Se possível, construa-o unindo 5 triângulos em cada vértice.
- Se $n = 6$, não é possível construir um poliedro regular. Por que não?



- Se $n > 6$, não é possível construir um poliedro regular. Por que não?

Etapa 3. Vamos passar aos quadrados.

- Se $n = 3$, é possível construir um poliedro regular? Se possível, construa-o unindo 3 quadrados em cada vértice.
- Se $n = 4$, não é possível construir um poliedro regular. Por que não?



- Se $n > 4$, não é possível construir um poliedro regular. Por que não?

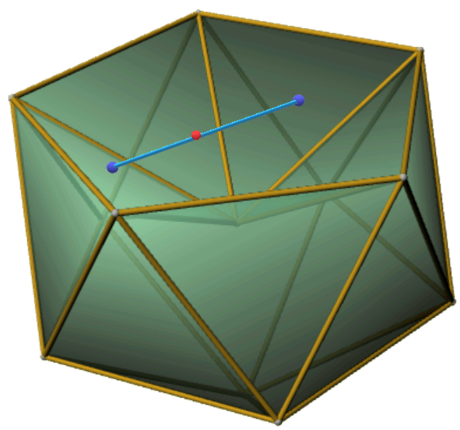
Etapa 4. Vamos passar para pentágonos regulares.

- Se $n = 3$, é possível construir um poliedro regular? Se possível, construa-o juntando 3 pentágonos em cada vértice.
- Se $n \geq 4$, não é possível construir um poliedro regular. Por que não?

Etapa 5. Por fim, vamos usar hexágonos. Explique por que não seria possível construir um poliedro regular usando hexágonos regulares.
Explique por que não seria possível construir um poliedro regular usando heptágonos (7 lados) regulares, octógonos (8 lados) regulares, etc.

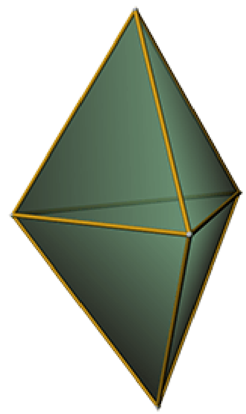
Poliedros não regulares

Um poliedro é convexo se, para cada par de pontos nas faces, todo o segmento que une os dois pontos estiver totalmente contido no poliedro.



Exemplo de um poliedro não convexo (clique aqui para manipular o poliedro)

Num poliedro regular, todos os vértices são idênticos em particular, têm o mesmo número de faces a insidirem nele).



A figura representa um exemplo de um poliedro em que todas as faces são polígonos regulares iguais, mas não é um poliedro regular (em alguns vértices incidem três faces e noutros quatro). (Clique aqui para manipular o poliedro).

A definição de poliedros regulares proíbe estes casos.

- Pode jogar nesta app [Mathina] para distinguir entre poliedros convexos e não convexos.
- Pode truncar, estrelar e fazer outras modificações em poliedros para obter novos sólidos com esta app [IMAGINARY GitHub].

Relação de Euler

Já observámos uma relação entre o número de faces, arestas e vértices nos sólidos Platónicos. Essa relação aplica-se a muitos outros poliedros não regulares:

Relação de Euler. Para qualquer poliedro equivalente à esfera, é válida a seguinte igualdade

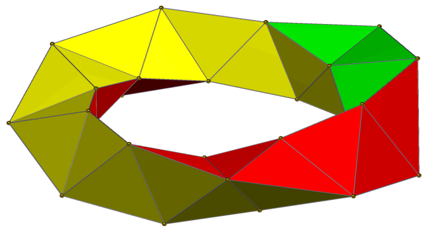
$$V - A + F = 2,$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

De um modo geral, a relação de Euler, representada pela letra grega χ é

$$\chi = V - A + F.$$

Um Teorema afirma que $\chi = 2$ para a maioria dos poliedros que possa imaginar. Como exceções, isto é, poliedros não equivalentes à esfera, temos por exemplo um toro poliedral ou o poliedro de Kepler-Poinsot (quando visto como tendo faces que se auto-intersetam). Todos os poliedros convexos têm $\chi = 2$.

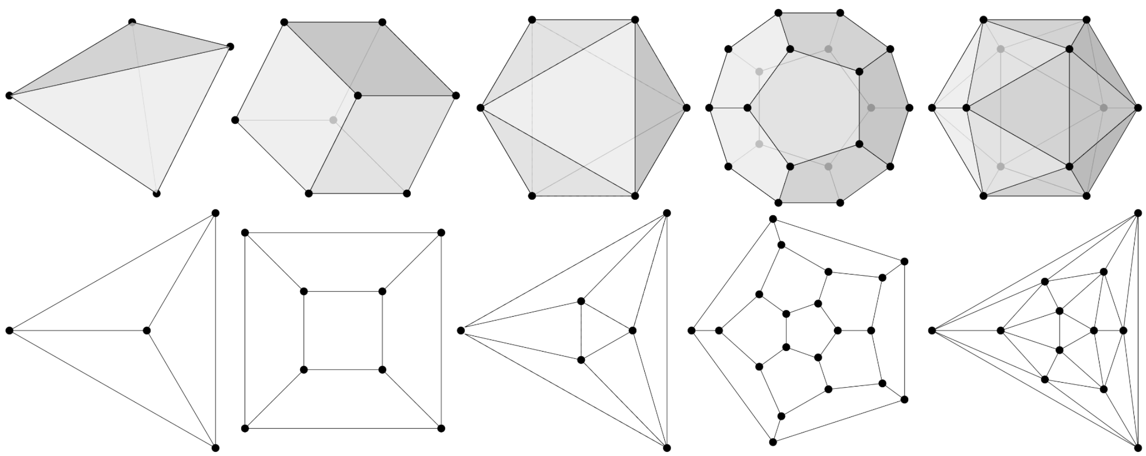


Um poliedro não regular e não convexo em forma de toro, com $\chi = 0$.

Vamos provar a relação de Euler.

Etapa 1. Como a relação não envolve ângulos, comprimentos ou outras medidas mensuráveis, podemos deformar o “esqueleto” (i.e. as arestas e os vértices) num grafo flexível e achatá-lo no plano. Prove que se pode desenhar o esqueleto de um poliedro convexo no plano, sem que as arestas se intersetem, obtendo-se assim um grafo planar. Um grafo é dito *planar* quando as suas arestas não se cruzam (apenas se tocam nos seus extremos, que são vértices).

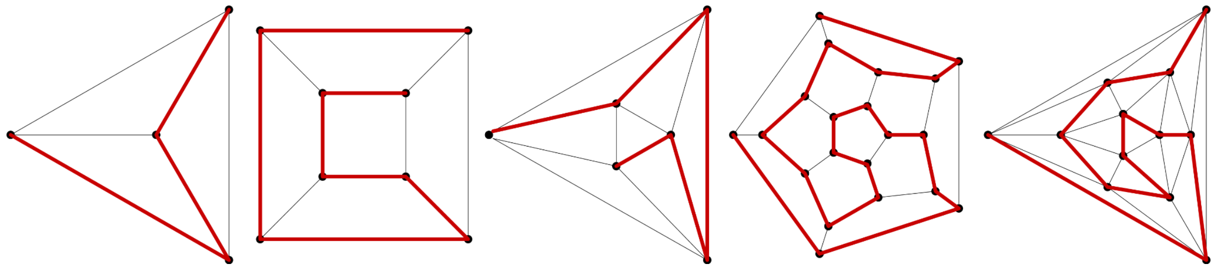
Por exemplo, podemos fazer isso com os sólidos Platónicos:



Note que cada grafo tem o mesmo número de vértices, arestas e faces que o poliedro original. As “faces” são as regiões delimitadas juntamente com a região exterior não limitada.

Podemos, pois, provar a relação de Euler para grafos planares.

Etapa 2. Mostre que, para cada grafo planar, podemos encontrar um caminho que liga todos os V vértices, usando $V - 1$ arestas.



Etapa 3. Suponha que removemos todas as arestas exceto aquelas que se encontram no caminho que liga os vértices. Prove que neste grafo temos χ = 2.

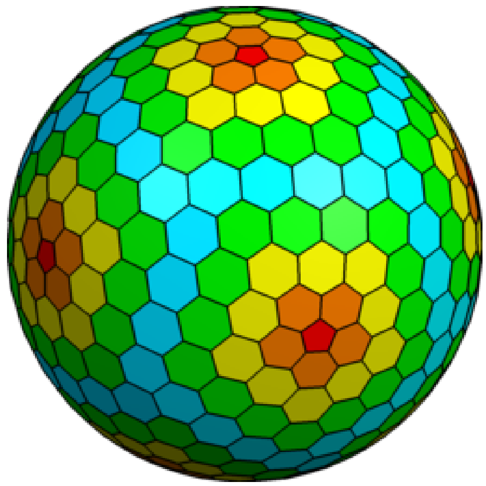
Etapa 4. Volte a pôr as arestas removidas na etapa anterior, uma a uma. Prove que cada vez que acrescenta uma aresta, a razão de Euler permanece χ = 2, até recuperarmos o grafo do nosso poliedro original.

Desafios adicionais

- Formas como pentágonos e hexágonos têm sido usadas na arquitetura, por exemplo, na Biosfera de Montreal projetada por Buckminster Fuller em 1967. Na biosfera de Montreal, as faces são triângulos: em cada vértice, juntam-se 5 ou 6 triângulos. Usando a fórmula de Euler, mostre que (se a esfera for completa) haverá sempre exatamente doze vértices ligados a cinco triângulos.

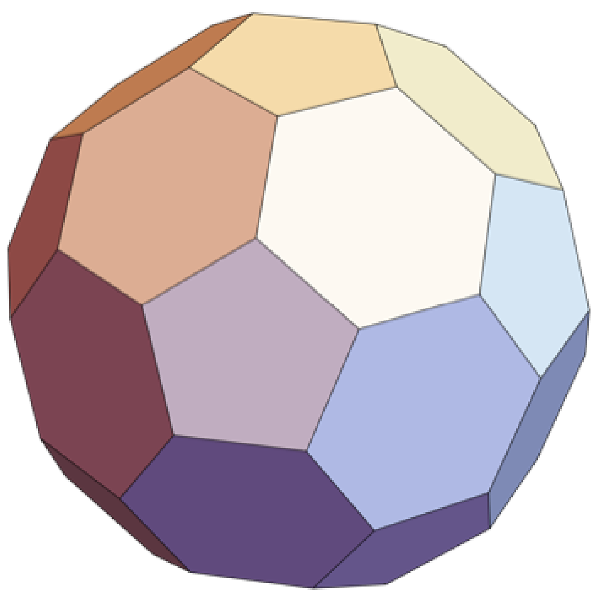
A Biosfera de Montreal
Imagem: Cédric THÉVENET, via Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

- *Os poliedros de Goldberg* são poliedros cujas faces são pentágonos e hexágonos e que têm as mesmas simetrias do icosaedro. Usando a relação de Euler, mostre que qualquer poliedro cujas faces são pentágonos e hexágonos, tem exatamente doze pentágonos. (Observe que o icosaedro tem exatamente 12 vértices e que 5 triângulos estão ligados a cada vértice.)



Um poliedro de Goldberg
Imagem: Tomruen, via Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

Outro poliedro de Goldberg é o icosaedro truncado, a bola de futebol que conhecemos tão bem.



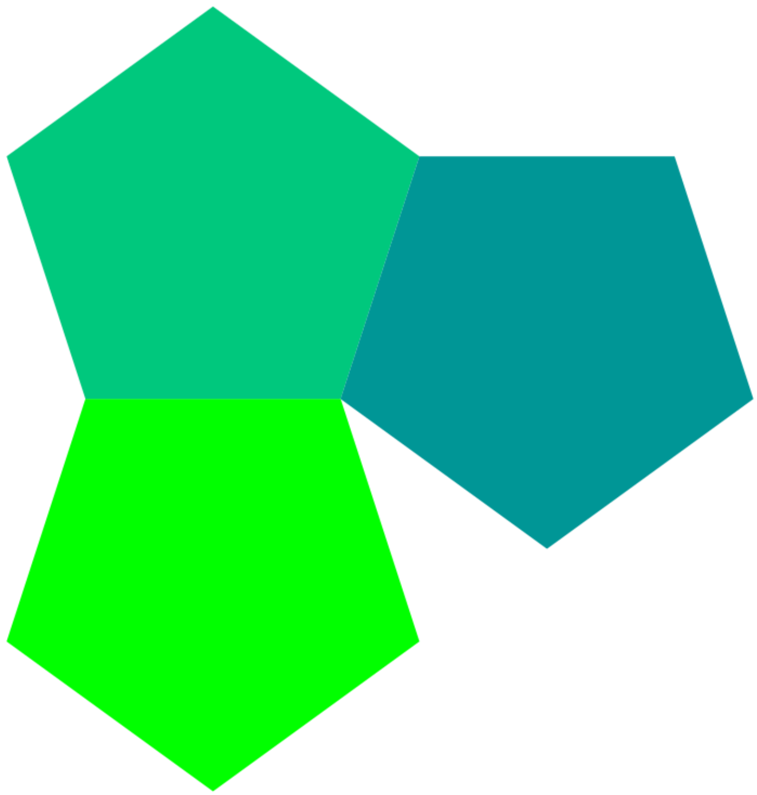
O icosaedro truncado

O Teorema de Descartes

Quando se constrói um poliedro, juntam-se faces em cada vértice. É possível calcular a soma dos ângulos das faces adjacentes a um vértice. Esta soma é

- menor que 360º se o poliedro for convexo junto desse vértice;
- igual a 360º se o poliedro for plano junto desse vértice;
- maior que 360º se o poliedro for côncavo junto desse vértice.

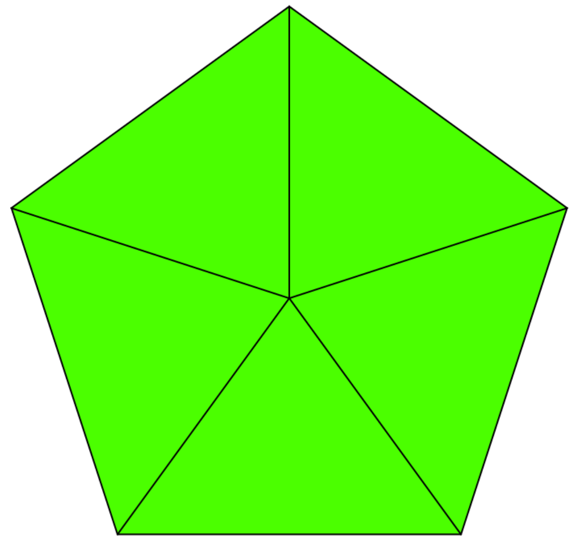
A diferença entre 360º e a soma dos ângulos num vértice chama-se *defeito angular nesse vértice*. (Note que o defeito angular é negativo no terceiro caso).



O defeito angular num vértice de um dodecaedro é 360º − 3x108º = 36º.

Teorema de Descartes: Para um poliedro, a soma dos defeitos angulares de todos os vértices, também chamada *defeito angular total*, é igual a 720º.

a) Verifique o Teorema de Descartes nos poliedros regulares ou noutros poliedros, como o icosaedro truncado.
b) Prove o Teorema de Descartes usando a relação de Euler:
    i) Em primeiro lugar, pode reduzir o problema ao de um poliedro com faces triangulares. Para isso, basta considerar um ponto interior de cada face poligonal e uni-lo a todos os vértices da face, dividindo assim a face em triângulos.



Se uma face tiver *n* arestas, o processo acrescenta um vértice (o ponto interior), *n* arestas que unem esse ponto interior aos vértices e uma das faces é substituída por *n* faces triangulares. Assim, a relação de Euler ($V + F = A + 2$) mantém-se válida.

ii) Prove o Teorema de Descartes para um poliedro de faces triangulares. Seja *D* a soma dos defeitos angulares, *V* o número de vértices, *A* o número de arestas e *F* o número de faces. Então:

$$A = 3/2\ F.$$

uma vez que cada face tem três arestas e cada aresta é contada duas vezes.

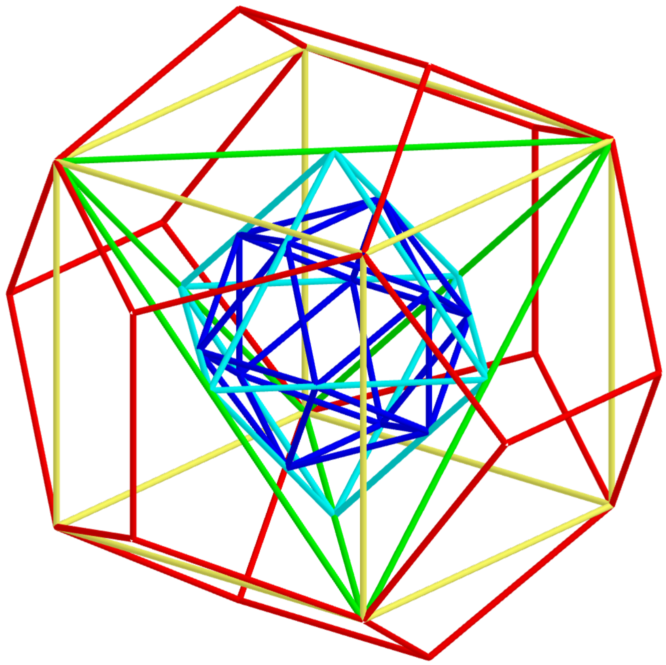
$$D = 360^\circ\ V - 180^\circ\ F.$$

Portanto,

$$D = 180^\circ(2V - F) = 180^\circ(2V + 2F - 3F) = 360^\circ(V + F - 3/2F)$$
$$= 360^\circ(V + F - A) = 360^\circ \times 2 = 720^\circ.$$

Construindo o omnipoliedro

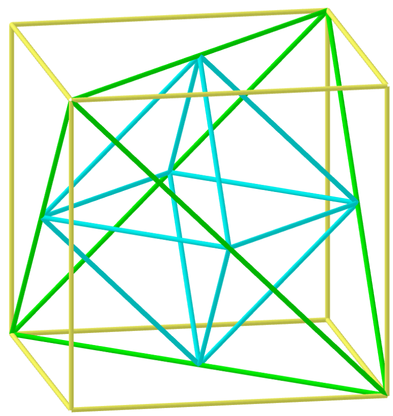
Um arranjo dos cinco poliedros regulares inscritos uns nos outros que exibe algumas das suas relações e propriedades é por vezes chamado *omnipoliedro* (não é um poliedro único, mas um arranjo de poliedros).

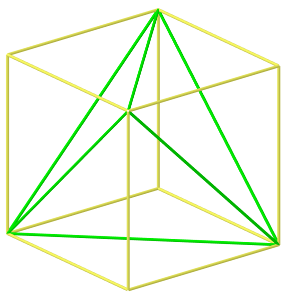
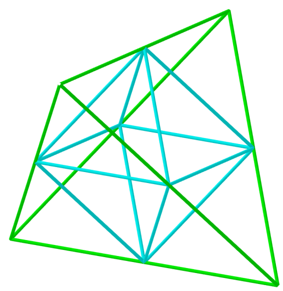
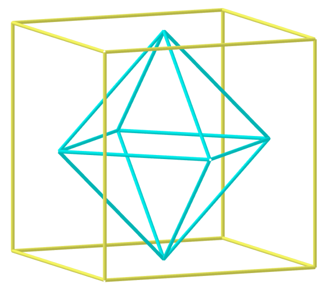


Propomos três construções parciais de poliedros inscritos. Pode construir qualquer um deles ou combinar os três para construir um omnipoliedro. Pode utilizar palitos de madeira e elásticos. O icosaedro também pode ser feito com fio depois de construído o octaedro. Também pode adquirir um kit do Zometool.

O cubo, o tetraedro e o octaedro.

Construa um cubo. Acrescente uma diagonal a cada uma das seis faces, construindo um tetraedro: para tal, é necessário escolher diagonais todas com extremidades em quatro vértices do cubo e três diagonais ligadas a cada um desses quatro vértices (há duas maneiras de o fazer). Una os pontos médios das arestas do tetraedro, construindo assim um octaedro.



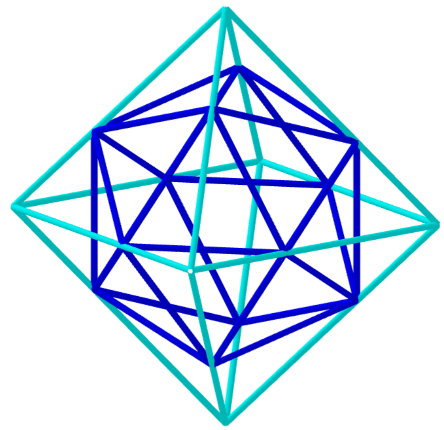
  

Esboce esta construção em papel, construa-a com palitos e prove matematicamente que funciona. Calcule os comprimentos das arestas do tetraedro e do octaedro.

Repare que as arestas do octaedro estão no centro das faces do cubo, pelo que podemos observar que o octaedro é o dual do cubo. Obtém-se o tetraedro dual se se escolher as outras diagonais das faces do cubo.

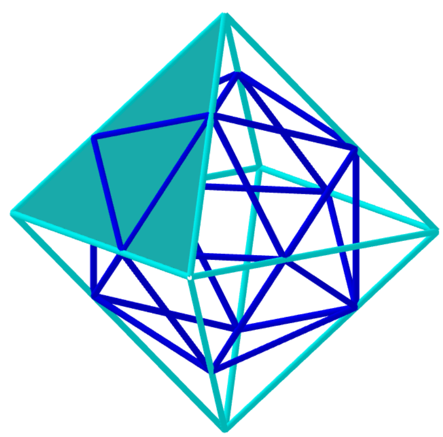
O icosaedro inscrito no octaedro

Um icosaedro regular pode ser inscrito num octaedro regular de modo a que cada um dos doze vértices do icosaedro fique numa das doze arestas do octaedro e estes vértices dividam as arestas do octaedro na proporção áurea ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618...$ é a *proporção áurea*, resultante da equação $\frac{\phi}{1} = \frac{\phi+1}{\phi}$ ou equivalentemente $\phi^2 = \phi + 1$),

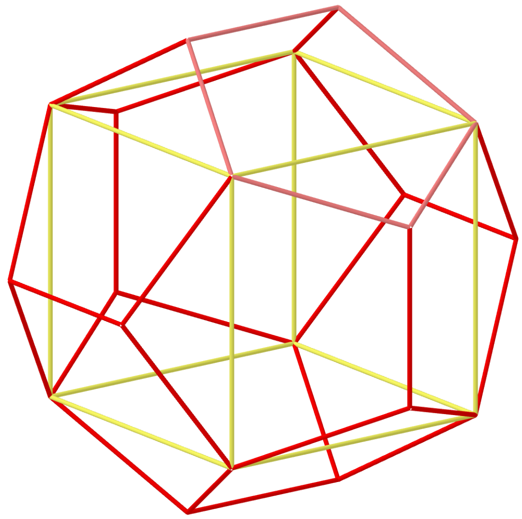


Esboce esta construção em papel, construa-a com palitos e prove matematicamente que funciona.

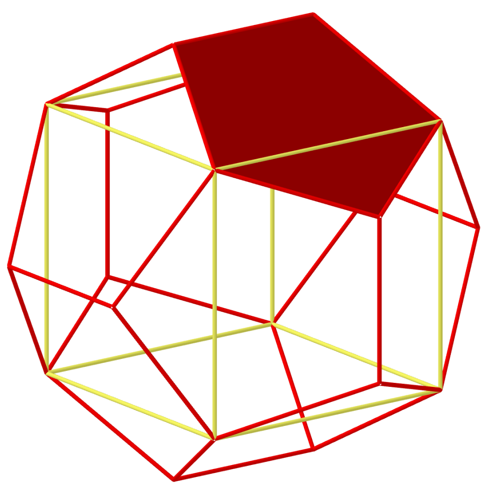
Dica: Cada face do octaedro contém uma face triangular do icosaedro. Calcule o comprimento do seu lado. As restantes arestas do icosaedro encontram-se no interior do octaedro. Prove que o seu comprimento é o mesmo que o das arestas construídas anteriormente.



O dodecaedro circunscrito no cubo



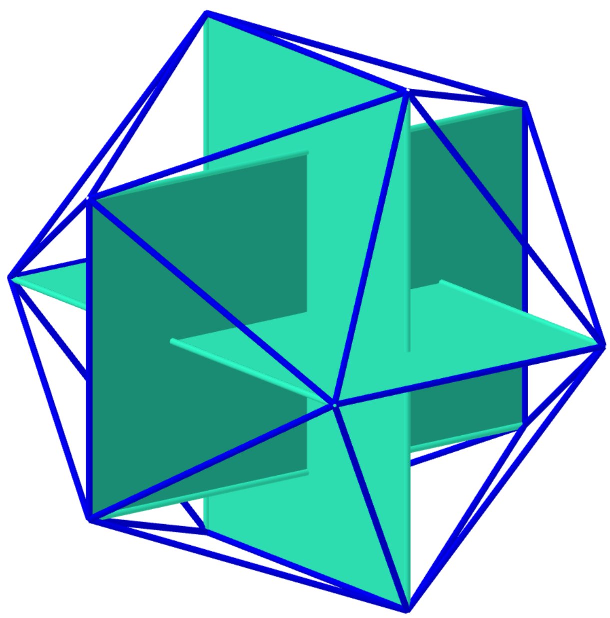
Considere um cubo. Em cima de cada face quadrada, construa um “telhado” composto por dois triângulos em lados opostos e dois trapézios em lados opostos, utilizando cinco palitos (comece por construir os dois triângulos adicionando dois palitos a cada um de dois lados opostos, depois junte os vértices livres com o palito restante). Construa os “telhados” em cada uma das faces do cubo por forma a que cada trapézio se ligue a um triângulo. Se o comprimento das novas arestas for exatamente 1/ϕ da aresta do cubo, então o trapézio e o triângulo que se encontram à volta de uma aresta do cubo alinhar-se-ão perfeitamente e formarão um pentágono regular, sendo o resultado global um dodecaedro.



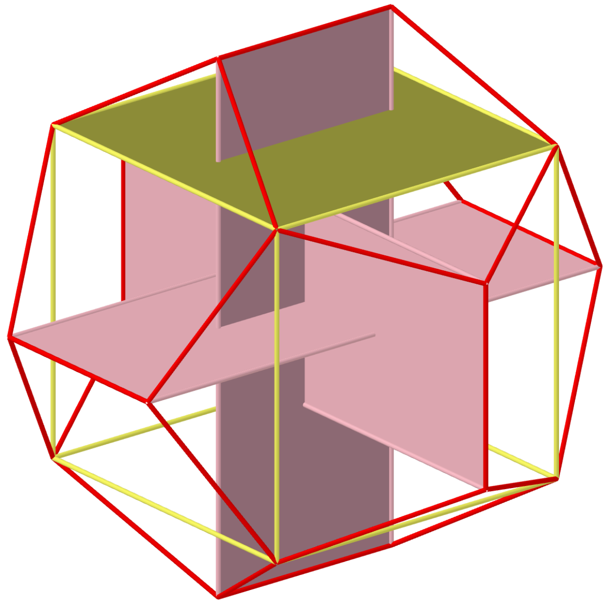
Esboce esta construção num papel, construa-a com palitos e prove matematicamente que funciona.

Desafios adicionais

- Considere três retângulos de ouro (num retângulo de ouro, o comprimento é ϕ vezes a largura). Corte uma fenda no centro de cada um deles (o tamanho da fenda é igual à largura dos retângulos) e encaixe-os de modo a que cada retângulo seja perpendicular aos outros dois. Os doze vértices dos retângulos estão dispostos como os de um icosaedro. Prove-o e construa-o.
  Nota: A maior parte dos cartões de crédito e dos cartões de visita são retângulos de ouro. Pode utilizar estes cartões e um fio para construir as arestas.



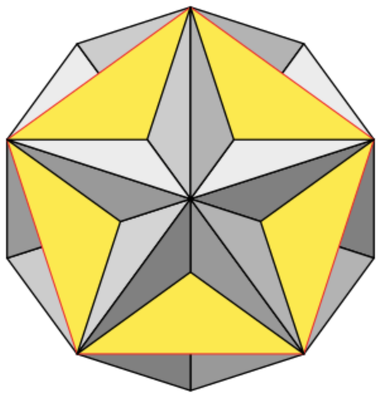
- Considere três retângulos iguais cujo comprimento é ϕ^2 vezes a largura. Corte uma fenda no centro de cada um deles e encaixe-os de modo a que cada retângulo seja perpendicular aos outros dois. Insira esta construção no centro de um cubo de lado ϕ, mantendo os retângulos paralelos às faces. Então, os doze vértices dos três retângulos, juntamente com os oito vértices do cubo, formam o conjunto de vértices de um dodecaedro regular.



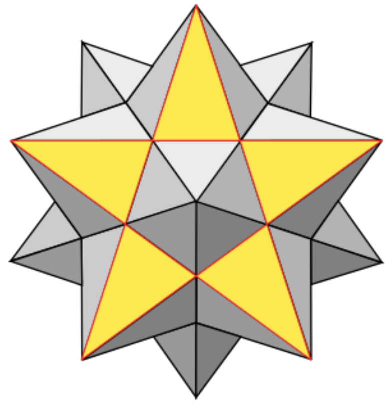
- Construa um modelo no GeoGebra3D calculando as coordenadas cartesianas de todos os vértices. Solução:
  - Cubo: $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$
  - Tetraedro: o subconjunto de vértices do cubo, tal que cada vértice tem um número par de sinais “menos”.
  - Octaedro: $(\pm\ 1, 0, 0)$, $(0, \pm\ 1, 0)$, $(0, 0, \pm\ 1)$
  - Icosaedro: $\left(\pm\frac{1}{\phi}, 0, \pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right)\right)$, e as suas permutações cíclicas, nomeadamente $\left(0, \pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right), \pm\frac{1}{\phi}\right)$ e $\left(\pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right), \pm\frac{1}{\phi}, 0\right)$.
  - Dodecaedro: As do cubo, juntamente com $\left(\pm\frac{1}{\phi},\ 0,\ \ \pm\ \phi\right)$ e as suas permutações cíclicas, nomeadamente $\left(0, \pm\ \phi, \pm\frac{1}{\phi},\right)$ e $\left(\pm\ \phi, \pm\frac{1}{\phi},\ 0\right)$

Poliedro regular	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Comprimento da aresta
Icosaedro	20	12	30	$\frac{1}{\phi^2}$
Octaedro	8	6	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tetraedro	4	4	6	$\sqrt{2}$
Cubo	6	8	12	1
Dodecaedro	12	20	30	$\frac{1}{\phi}$

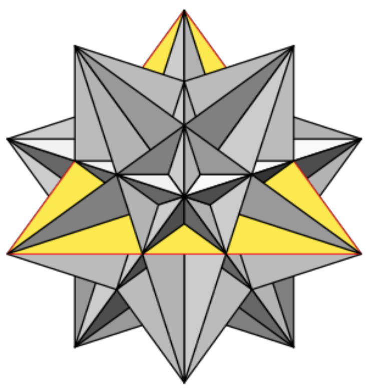
Os poliedros de Kepler-Poinsot



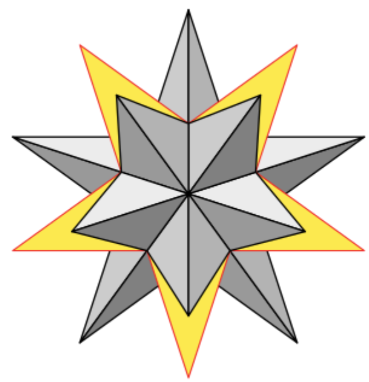
Grande dodecaedro



Pequeno dodecaedro estrelado



Grande icosaedro

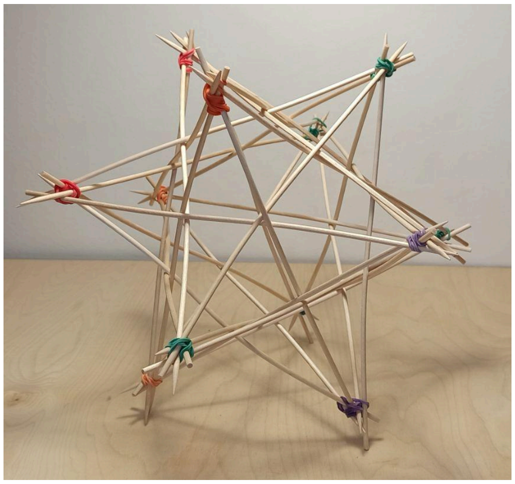


Grande dodecaedro estrelado

Existem quatro poliedros de Kepler-Poinsot e todos eles são não convexos. Todos parecem ter muitas faces, arestas e vértices. Por exemplo, para construir um *pequeno dodecaedro estrelado* a partir de cartão, é necessário cortar e colar 60 faces. Este poliedro tem 90 arestas e 32 vértices. Portanto, a relação de Euler é novamente verdadeira.

Mas os matemáticos têm muita imaginação e criatividade. De facto, observe novamente o pequeno dodecaedro estrelado. E observe os cinco triângulos amarelos. Todos eles se encontram no mesmo plano. Se quisermos completar a parte do meio que falta (que tem a forma de um pentágono), o que obtemos é uma estrela regular de cinco pontas, chamada *pentagrama*. Assim, os matemáticos podem decidir ver a parte central da estrela não como em falta, mas como estando no interior do poliedro. O mesmo se aplica a todas as outras faces pequenas. Em grupos de cinco, elas pertencem a outros pentagramas, cuja parte central se encontra no interior do poliedro. Como começámos com 60 faces, isto resulta em doze pentagramas. Assim, podemos considerar este pequeno dodecaedro estrelado como tendo doze (daí o nome) *faces generalizadas* com a forma de pentagramas, que se podem auto-intersetar! Os matemáticos decidiram alargar a definição de poliedro de modo a permitir uma tal construção, Convidamo-lo agora a analisar de forma análoga os três outros poliedros de Kepler-Poinsot. Os dois *dodecaedros estrelados* têm doze faces com a forma de pentagramas. O *grande dodecaedro* tem doze faces pentagonais que se intersetam. O *grande icosaedro* tem vinte faces triangulares que se intersetam.

Pode tentar construir alguns destes poliedros com palitos e/ou cartolina.



Outros recursos

- Leia uma [história de fantasia sobre poliedros](#) online, com apps interativas e filmes.
- A associação portuguesa Atractor tem muitas animações e imagens de poliedros (e das suas planificações, propriedades, etc.) no seu [site](#).
- Zometool. A obsessão de Kepler. https://www.zometool.com/products/keplers-obsession.html

Crie e partilhe!
Partilhe as descobertas dos participantes utilizando as hashtags **#idm314polyhedra** e **#idm314**.