Polyèdres artistiques

Participantes et participants :

À partir de 14 ans, selon l'activité.

Aucune connaissance mathématique préalable n'est nécessaire, mais au fil des activités, vous devrez peut-être introduire et appliquer des concepts mathématiques tels que les polygones, les polygones réguliers et les polyèdres, et utiliser des notions de base telles que la somme des angles d'un triangle, le nombre d'or, les constructions géométriques de base ou les coordonnées cartésiennes.

Matériel :

Pour les modèles physiques, on utilise des pics à brochettes ou bâtonnets en bois et des élastiques. Les bâtonnets peuvent éventuellement être colorés avec de la peinture. Dans certaines constructions, il peut être utile de fabriquer des polyèdres avec de la ficelle pour éviter de s'encombrer de bâtonnets. On peut aussi construire des polyèdres avec des cartons de couleur.

Certaines images peuvent être projetées en classe par l'enseignant. En outre, certaines activités comportent des liens vers des animations et des applications interactives en ligne.

Se familiariser avec les polyèdres réguliers

Posez quelques questions préliminaires à vos élèves :

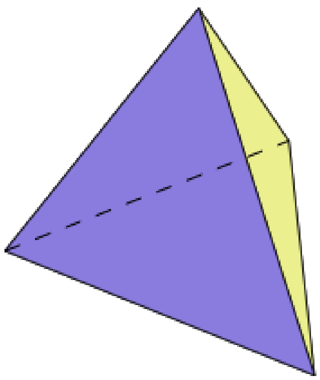
Qu'est-ce qu'un *polyèdre* ?

- C'est un solide tridimensionnel délimité par des faces planes. Les *faces* sont des polygones plats.
- Les segments de droite où deux faces se rencontrent sont appelés les *arêtes*.
- Les points de rencontre de trois faces ou plus sont appelés *sommets*. Ce sont les extrémités des arêtes.

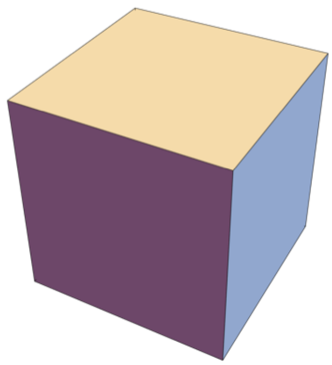
Qu'est-ce qu'un *polyèdre régulier* ?

- C’est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques. (Un polygone est régulier si tous ses côtés sont de même longueur et tous ses angles sont égaux.)
- ET, à chaque sommet, on a le même nombre de faces.
- ET, le polyèdre, est *convexe* (c’est-à-dire qu’il n’a pas de creux).

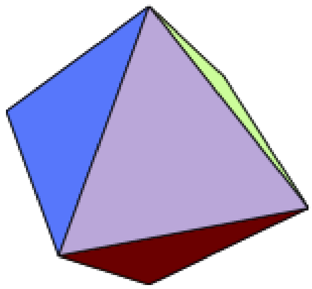
Les cinq polyèdres réguliers :



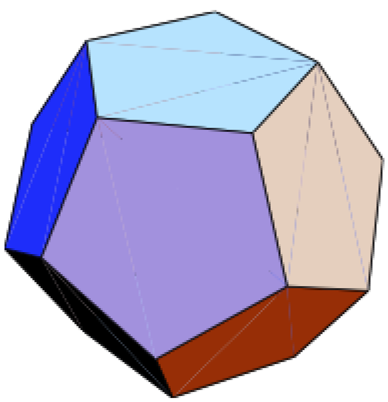
Tétraèdre



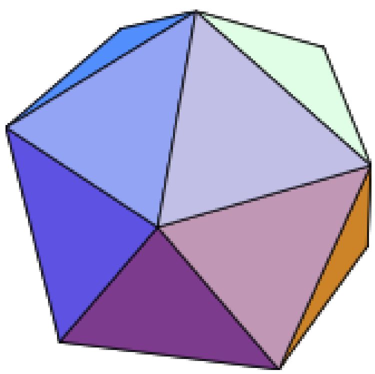
Cube



Octaèdre



Dodécaèdre



Icosaèdre

Ce sont les seuls polyèdres réguliers, également connus sous le nom de *solides de Platon* (cliquez sur les liens pour manipuler les polyèdres).

A partir des images et du nombre et du type de faces, déduisez le nombre d'arêtes et de sommets (vous aurez besoin de bâtonnets et d'élastiques) et construisez les cinq polyèdres réguliers.

Polyèdre régulier	Type de face	Nombre de faces, *F*	Nombre de sommets, *S*	Nombre d'arêtes, *A*
Icosaèdre	triangle	20	12	30
Octaèdre	triangle	8	6	12
Tétraèdre	triangle	4	4	6
Cube	carré	6	8	12
Dodécaèdre	pentagone	12	20	30

Observez la *relation d'Euler* : $F + S = A + 2$
Observez également qu'il existe une relation étroite entre :

- l'octaèdre et le cube
- l'icosaèdre et le dodécaèdre
- le tétraèdre avec lui-même.

(Comparez les nombres de sommets, de faces et d'arêtes.)

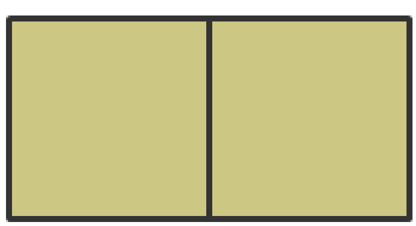
Ces polyèdres sont appelés *duaux* : Le nombre de sommets de l'un est égal au nombre de faces de l'autre, et inversement. On peut en obtenir l'un de ces polyèdres en prenant les sommets au centre des faces de l'autre. On a le même nombre d'arêtes, mais les arêtes du polyèdre dual sont tournées de 90º.

Il n'y a que cinq polyèdres réguliers

Montrons qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers. Vous pouvez utiliser du papier ou du carton et du ruban adhésif pour construire les figures de l'argument.

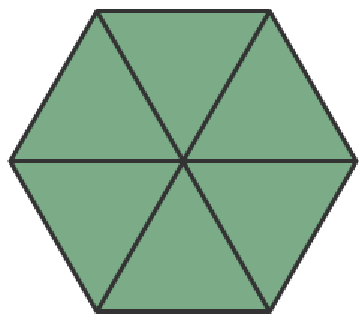
Nous savons que dans un polyèdre régulier, toutes les faces sont des polygones réguliers égaux. Soit *n,* le nombre de faces qui se rejoignent en un sommet.

Étape 1 : Si $n = 2$, expliquez pourquoi il n'est possible de construire aucun polyèdre.



Étape 2 : Nous savons déjà que $n \geq 3$. Essayons de construire tous les polyèdres réguliers possibles, dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

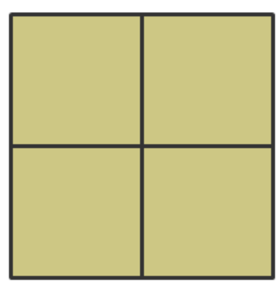
- Si $n = 3$, est-il possible de construire un polyèdre régulier ? Si c'est possible, construisez-le en joignant 3 triangles à chaque sommet.
- Si $n = 4$, est-il possible de construire un polyèdre régulier ? Si c'est possible, construisez-le en joignant 4 triangles à chaque sommet.
- Si $n = 5$, est-il possible de construire un polyèdre régulier ? Si c'est possible, construisez-le en joignant 5 triangles à chaque sommet.
- Si $n = 6$, il n'est pas possible de construire un polyèdre régulier. Pourquoi ?



- Si $n > 6$, il n'est pas possible de construire un polyèdre régulier. Pourquoi ?

Étape 3. Passons à des carrés.

- Si $n = 3$, est-il possible de construire un polyèdre régulier ? Si c'est possible, construisez-le en joignant 3 carrés à chaque sommet.
- Si $n = 4$, il n'est pas possible de construire un polyèdre régulier. Pourquoi ?



- Si $n > 4$, il n'est pas possible de construire un polyèdre régulier. Pourquoi ?

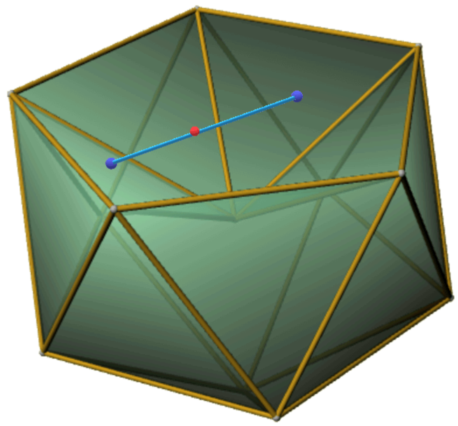
Étape 4. Passons aux pentagones réguliers.

- Si $n = 3$, est-il possible de construire un polyèdre régulier ? Si c'est possible, construisez-le en joignant 3 pentagones à chaque sommet.
- Si $n \geq 4$, il n'est pas possible de construire un polyèdre régulier. Pourquoi ?

Étape 5. Enfin, utilisons des hexagones. Expliquez pourquoi il ne serait pas possible de construire un polyèdre régulier en utilisant des hexagones réguliers.
Expliquez pourquoi il ne serait pas possible de construire un polyèdre régulier en utilisant des heptagones réguliers (7 côtés), des octogones réguliers (8 côtés), etc.

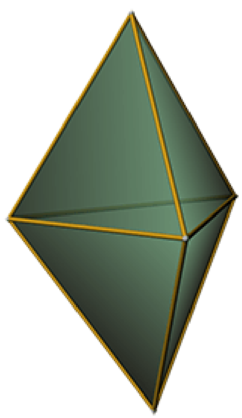
D’autres polyèdres

Un polyèdre est *convexe* si, pour chaque couple de points sur les faces, tout le segment joignant les points est contenu dans le polyèdre.



Exemple de polyèdre non convexe (cliquez ici pour manipuler le polyèdre)

Dans un polyèdre régulier, tous les sommets sont identiques. En particulier, le même nombre de faces s’y rejoignent.



Exemple d'un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers, mais qui n'est pas un polyèdre régulier (trois faces se rejoignent à certains sommets et quatre faces à d’autres). (Cliquez ici pour manipuler le polyèdre.)

La définition des polyèdres réguliers interdit ces cas.

- Vous pouvez jouer avec cette application interactive app [Mathina] pour distinguer les polyèdres convexes des polyèdres non convexes.

- Vous pouvez tronquer, ajouter des pyramides sur les faces pour obtenir des polyèdres étoilés et modifier des polyèdres afin d'obtenir de nouveaux polyèdres à l'aide de cette application interactive app [IMAGINARY GitHub].

La relation d'Euler

Nous avons déjà observé une relation entre le nombre de faces, d'arêtes et de sommets dans les solides de Platon. Cette relation est également valide pour de nombreux autres polyèdres non réguliers.

La relation d'Euler : Tout polyèdre qu'on peut déformer en une sphère satisfait à

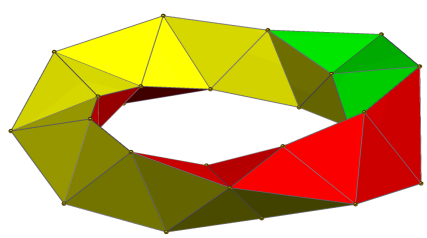
$$S - A + F = 2,$$

où S est le nombre de sommets, A est le nombre d'arêtes, and F est le nombre de faces.

Plus généralement, la caractéristique d'Euler, désignée par la lettre grecque χ, est définie par

$$\chi = S - A + F$$

Le théorème stipule que χ = 2 pour la plupart des polyèdres auxquels on peut penser. Les exceptions, c'est-à-dire les polyèdres qu'on ne peut déformer en une sphère, comprennent par exemple un tore avec des faces polygonales ou les polyèdres de Kepler-Poinsot (si l'on considère qu'ils ont des faces qui se croisent) parce qu'ils font plus d'une fois le tour de la sphère. Tous les polyèdres convexes ont χ = 2.

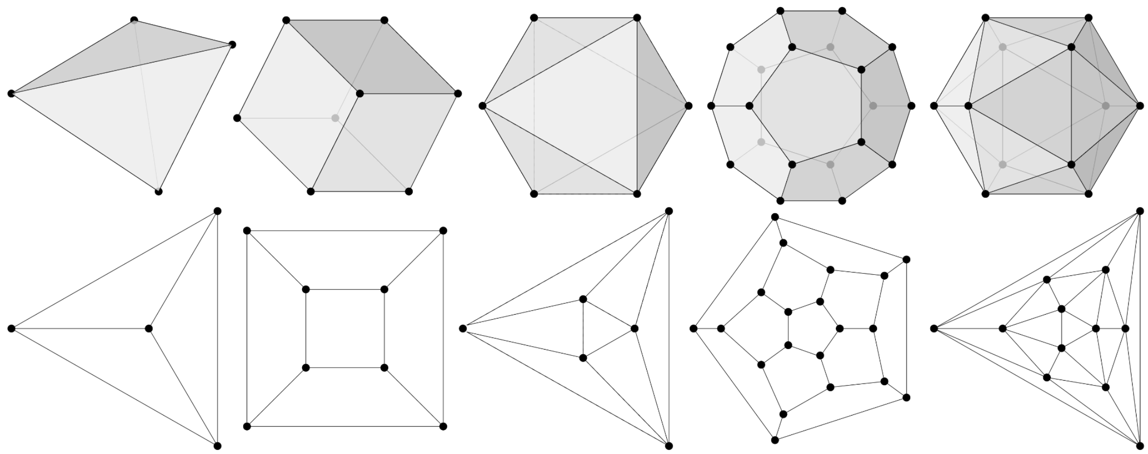


Un polyèdre non régulier, non convexe, en forme de tore, pour lequel χ = 0.

Montrons la relation d'Euler.

Étape 1. Puisque la relation n'implique pas d'angles, de longueurs ou d'autres mesures métriques, nous pouvons déformer le squelette (soit les arêtes et les sommets) comme un graphe flexible et l'étirer jusqu'à l'aplatir dans un plan. Prouver que l'on peut dessiner le squelette d'un polyèdre convexe sur un plan, sans intersections des arêtes, ce qui donne un graphe planaire. Un graphe est dit *planaire* lorsque ses arêtes ne se croisent pas (elles ne se touchent qu'à leurs extrémités en des sommets).

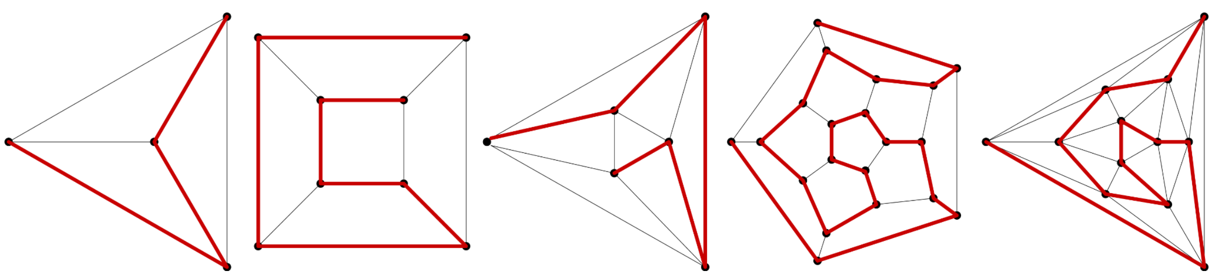
Par exemple, nous pouvons le faire avec les solides de Platon :



Notez que chaque graphe a le même nombre de sommets, d'arêtes et de faces que le polyèdre original. Les « faces » sont les régions fermées, ainsi que la région extérieure non limitée.

Nous pouvons donc prouver la relation d'Euler pour les graphes planaires.

Étape 2. Montrer que sur chaque graphe planaire, on peut trouver un chemin qui relie tous les S sommets, en utilisant $S - 1$ arêtes.



Étape 3. Supposons que nous supprimions toutes les arêtes à l'exception de celles qui se trouvent sur le chemin reliant les sommets. Prouvez que sur ce graphe, nous avons $\chi = 2$.

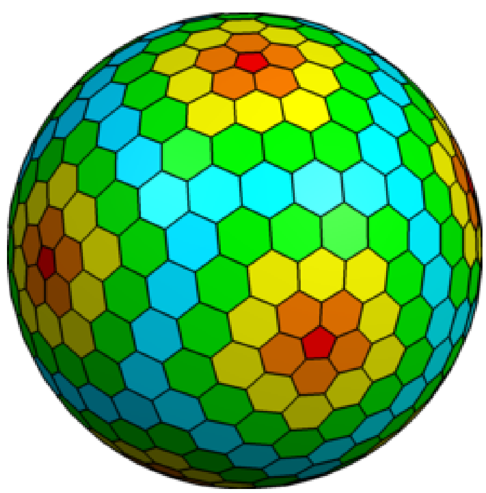
Étape 4. Remettez les arêtes supprimées à l'étape précédente, une par une. Prouver qu'en ajoutant chaque arête, la caractéristique d'Euler reste $\chi = 2$, jusqu'à ce que l'on retrouve le graphe de notre polyèdre original.

Défis supplémentaires

- Les formes pentagonales et hexagonales ont été utilisées pour la conception architecturale, par exemple la biosphère de Montréal conçue par Richard Buckminster Fuller en 1967. Dans la biosphère de Montréal, les faces sont des triangles assemblés par 5 ou 6 à chaque sommet. En utilisant la relation d'Euler, montrez que (si la sphère était complète) il y a toujours exactement douze sommets attachés à cinq triangles.

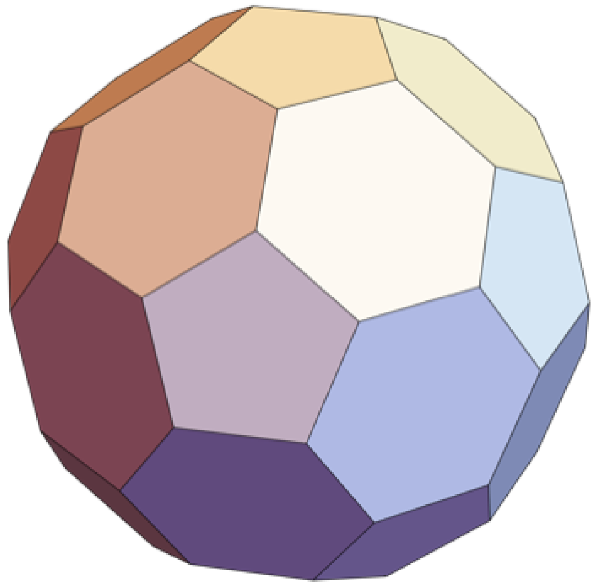
La biosphère de Montréal
Image: Cédric THÉVENET, via Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

- Les *polyèdres de Goldberg* sont des polyèdres dont toutes les faces sont des pentagones ou des hexagones et qui ont les mêmes symétries que l'icosaèdre. En utilisant la formule d'Euler, montrez que tout polyèdre dont toutes les faces sont des pentagones et des hexagones possède exactement douze pentagones. (Notez que l'icosaèdre a exactement 12 sommets et que cinq triangles sont attachés à chaque sommet).



Un polyèdre de Goldberg
Image: Tomruen, via Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

Un autre polyèdre de Goldberg est l'icosaèdre tronqué, ce ballon de soccer que nous connaissons bien.



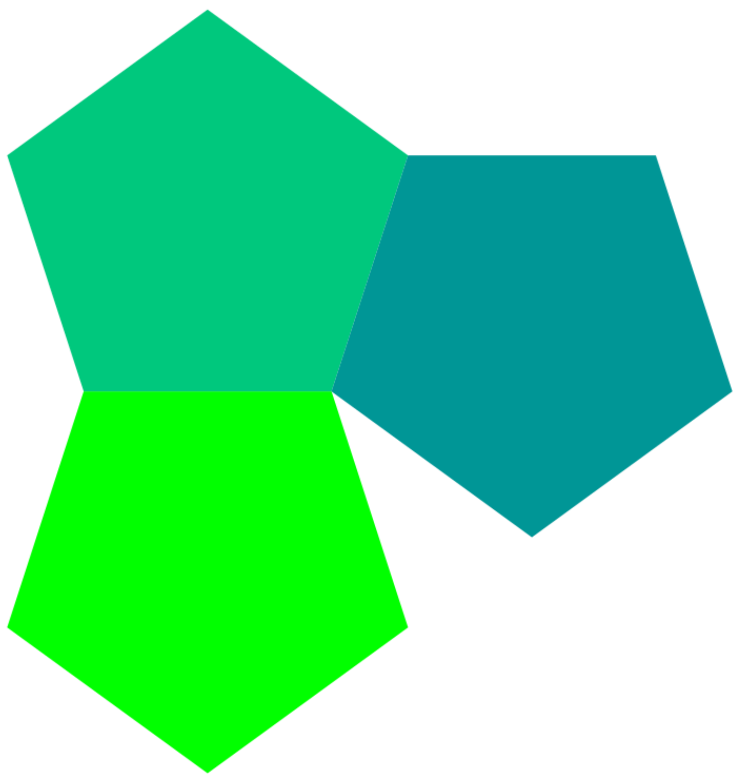
L’icosaèdre tronqué

Le théorème de Descartes

Lorsqu'on construit un polyèdre, on assemble des faces à chaque sommet. On peut compter la somme des angles des faces adjacentes à un sommet. Cette somme est

- inférieure à 360º si le polyèdre est convexe au voisinage de ce sommet ;
- égale à 360º si le polyèdre est plat près de ce sommet ;
- supérieure à 360º si le polyèdre est concave près de ce sommet.

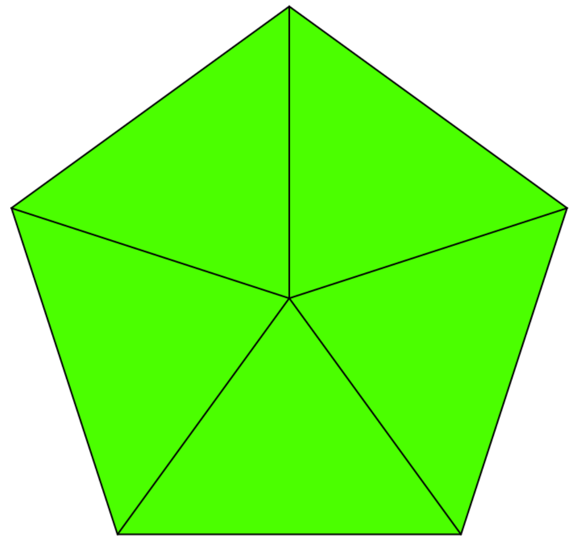
La différence entre 360º et la somme des angles à un sommet s'appelle le *défaut* à ce sommet. (Notez que le défaut est négatif dans le troisième cas).



Le défaut au sommet d'un dodécaèdre est $360^\circ - 3 \times 108^\circ = 36^\circ$.

Théorème de Descartes : Sur un polyèdre, la somme des défauts à chaque sommet, également appelée *défaut total*, est égale à 720º.

a) Vérifiez le théorème de Descartes sur les polyèdres réguliers ou d'autres polyèdres, tels qu'un icosaèdre tronqué.
b) Montrer le théorème de Descartes en utilisant la relation d'Euler :
    i) Tout d'abord, on peut ramener le problème à celui d'un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles : pour cela, il suffit de prendre un point intérieur à chaque face polygonale et de le joindre à tous les sommets de la face, divisant ainsi la face en triangles.



Si une face a n arêtes, le processus ajoute un sommet (le point intérieur), n arêtes reliant le point intérieur aux sommets, et une face est remplacée par n faces triangulaires. On a donc ajouté $n - 1$ faces et la relation d'Euler ($S + F = A + 2$) reste donc valable.

ii) Prouvez le théorème de Descartes pour un polyèdre à faces triangulaires. Soit D, la somme des défauts, S, le nombre de sommets, A, le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Dans ce cas :

$$A = 3/2\ F.$$

iii) Puisque chaque face a trois arêtes et que chaque arête est comptée deux fois :

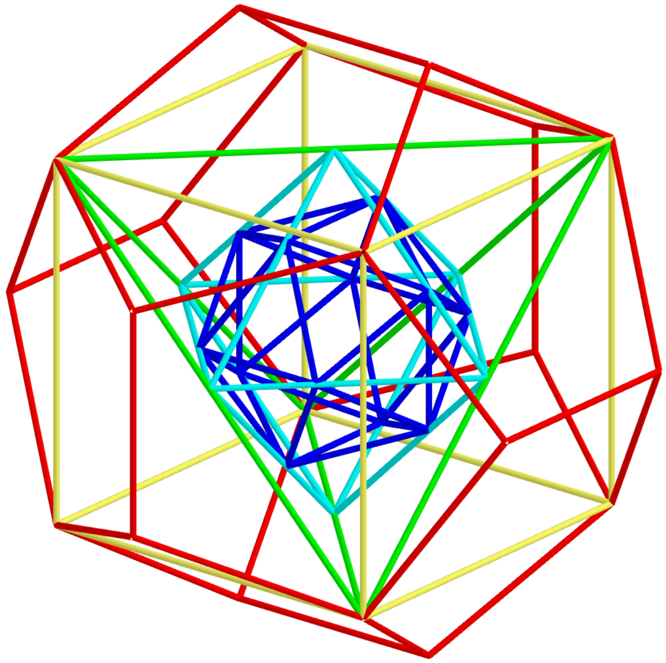
$$D = 360^\circ\ S - 180^\circ\ F.$$

iv) Ainsi,

$$D = 180^\circ(2S - F) = 180^\circ(2S + 2F - 3F) = 360^\circ(S + F - 3/2F)$$
$$= 360^\circ(S + F - A) = 360^\circ \times 2 = 720^\circ.$$

Construction de l'omnipolyèdre

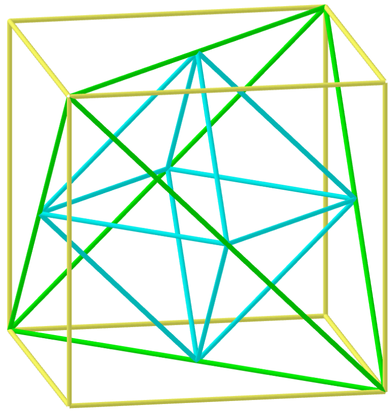
Un arrangement des cinq polyèdres réguliers inscrits les uns dans les autres qui présente certaines de leurs relations et propriétés est parfois appelé *omnipolyèdre* (il ne s'agit pas d'un polyèdre unique, mais d'un arrangement de polyèdres).

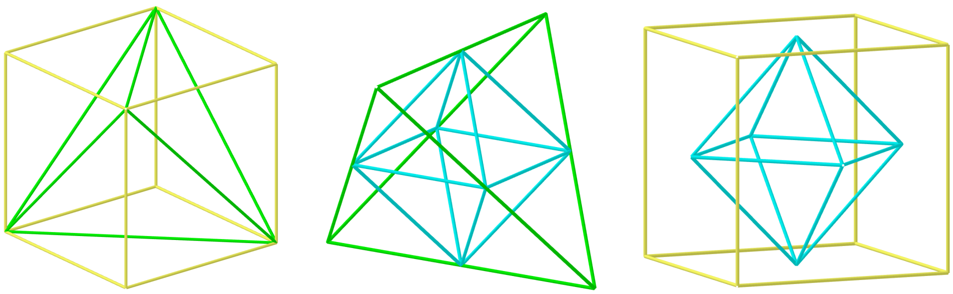


Nous proposons trois constructions partielles de polyèdres inscrits. Vous pouvez réaliser n'importe laquelle d'entre elles ou combiner les trois pour construire un omnipolyèdre. Vous pouvez utiliser des bâtonnets de bois et des élastiques. L'icosaèdre peut également être fabriqué avec de la ficelle une fois que l'octaèdre est construit.

Le cube, le tétraèdre et l’octaèdre

Construisez un cube. Ajouter une diagonale sur chacune des six faces pour construire un tétraèdre : pour cela, vous devez choisir des diagonales dont toutes les extrémités sont sur quatre sommets du cube, trois diagonales étant attachées à chacun de ces sommets. (Il y a deux manières de le faire.) Joignez les points médians des arêtes du tétraèdre pour construire un octaèdre.



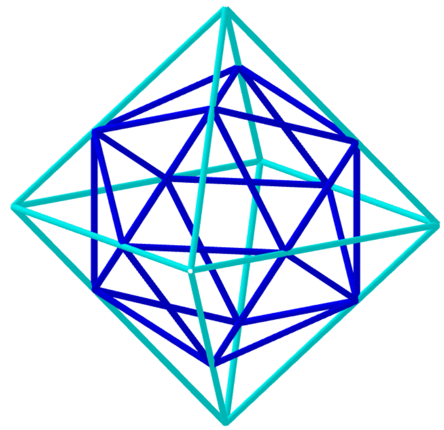


Dessinez cette construction sur papier, construisez-la avec des bâtonnets et prouvez mathématiquement qu'elle fonctionne. Calculez les longueurs des arêtes du tétraèdre et de l'octaèdre.

Notez que les arêtes de l'octaèdre sont au centre des faces du cube, de sorte que nous pouvons voir que l'octaèdre est le dual du cube.

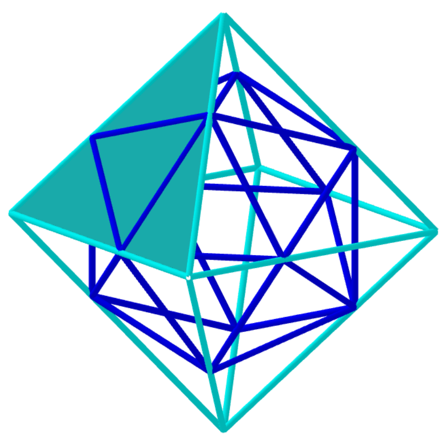
L’icosaèdre inscrit dans un octaèdre

Un icosaèdre régulier peut être inscrit dans un octaèdre régulier de telle sorte que chacun des douze sommets de l'icosaèdre se trouve sur l'une des douze arêtes de l'octaèdre, et que ces sommets divisent les arêtes selon le nombre d'or. (Le *nombre d’or* $\phi \simeq 1.618$... satisfait à l’équation $\frac{\phi}{1} = \frac{\phi+1}{\phi}$ ou, de manière équivalente, $\phi^2 = \phi + 1$.)

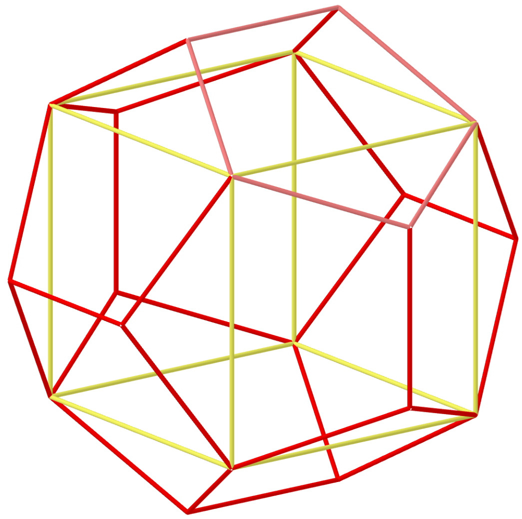


Dessinez cette construction sur papier, construisez-la avec des bâtonnets et prouvez mathématiquement qu'elle fonctionne.

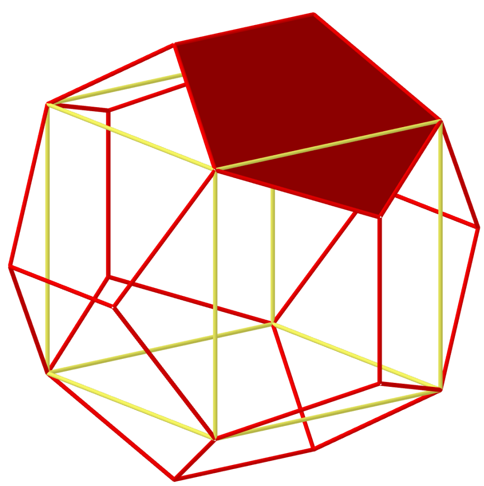
Conseil : chaque face de l'octaèdre contient une face triangulaire de l'icosaèdre. Calculez la longueur de son côté. Les autres arêtes de l'icosaèdre se trouvent à l'intérieur de l'octaèdre. Prouvez que leur longueur est la même que celle des arêtes construites précédemment.



Le dodécaèdre circonscrit au cube



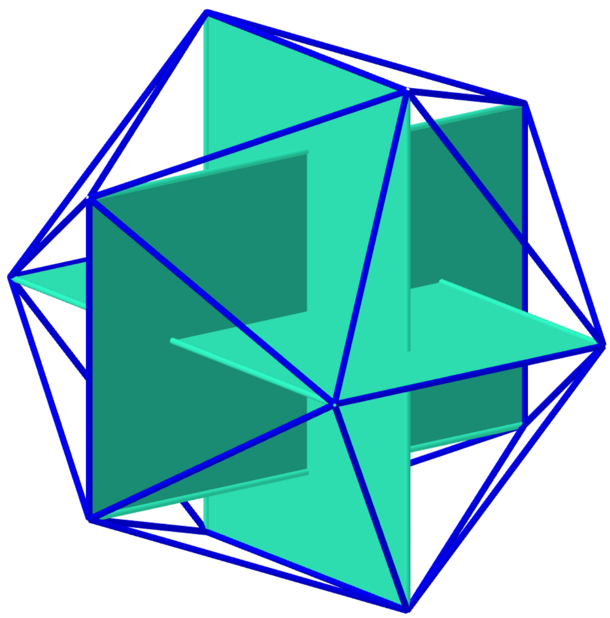
Prenez un cube. Sur chaque face carrée, construisez un « toit » composé de deux triangles aux côtés opposés et de deux trapèzes aux deux autres côtés opposés, à l'aide de cinq bâtonnets (construisez d'abord les deux triangles en ajoutant deux bâtons à chacun des deux côtés opposés, puis joignez les sommets libres à l'aide du bâton restant). Réalisez les toits sur chacune des faces du cube de manière à ce qu'un trapèze rencontre un triangle. Si la longueur des nouvelles arêtes est exactement égale à $1/\phi$ de l'arête du cube, alors le trapèze et le triangle appariés autour d'une arête du cube seront dans un même plan et s'aligneront parfaitement pour former un pentagone régulier ; et le résultat global sera un dodécaèdre régulier.



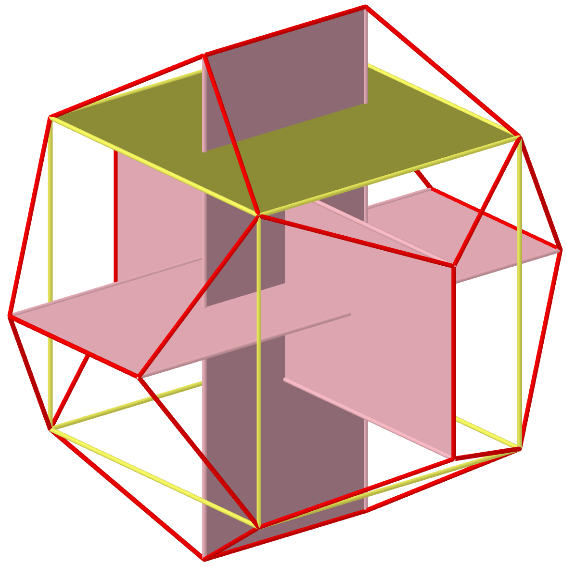
Dessinez cette construction sur du papier, construisez-la avec des bâtonnets et prouvez mathématiquement qu'elle fonctionne.

Défis supplémentaires

- Prendre trois rectangles d'or égaux. (Dans un *rectangle d'or* la longueur est égale à ϕ fois la largeur.) Faites une fente au centre de chacun d'eux (de la même taille que la largeur des rectangles) et assemblez-les de manière à ce que chaque rectangle soit perpendiculaire aux deux autres. Les douze sommets sont disposés comme dans un icosaèdre. Prouvez-le et construisez-le.



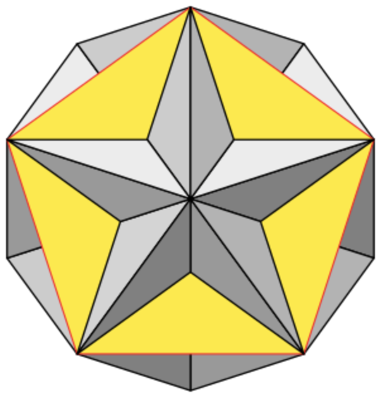
- Prenez trois rectangles dont la longueur est égale à ϕ^2 fois la largeur. Faites une fente au centre de chacun d'eux et assemblez-les de façon à ce que chaque rectangle soit perpendiculaire aux deux autres. Insérez cette construction au centre d'un cube de côté ϕ, en maintenant les rectangles parallèles aux faces. Les douze sommets des trois rectangles, plus les huit sommets du cube, forment alors l'ensemble des sommets d'un dodécaèdre régulier.



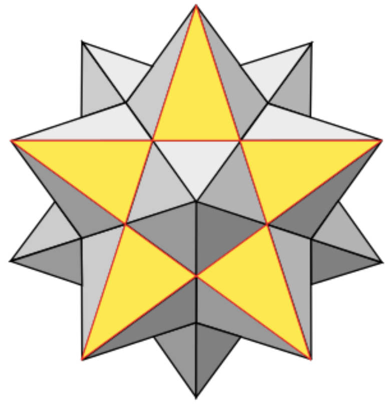
- Construisez un modèle des polyèdres réguliers dans GeoGebra en calculant les coordonnées cartésiennes de tous les sommets.
  Solution :
  - Cube : $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$.
  - Tétraèdre : le sous-ensemble des sommets du cube dont exactement 0 ou 2 coordonnées sont négatives.
  - Octaèdre : $(\pm\ 1, 0, 0)$, $(0, \pm\ 1, 0)$, $(0, 0, \pm\ 1)$.
  - Icosaèdre : $\left(\pm \frac{1}{\phi}, 0, \pm\left(1 - \frac{1}{\phi}\right)\right)$, et ses permutations cycliques, soit $\left(0, \pm\left(1 - \frac{1}{\phi}\right), \pm \frac{1}{\phi}\right)$ et $\left(\pm\left(1 - \frac{1}{\phi}\right), \pm \frac{1}{\phi}, 0\right)$.
  - Dodécaèdre : les sommets du cube, auxquels on ajoute $\left(\pm \frac{1}{\phi},\ 0, \pm\ \phi\right)$, et ses permutations cycliques, soit $\left(\ 0, \pm\ \phi, \pm \frac{1}{\phi},\right)$ et $\left(\pm\ \phi, \pm \frac{1}{\phi},\ 0\right)$.

Polyèdre régulier	Nombre de faces	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes	Longueur de l'arête
Icosaèdre	20	12	30	$\frac{1}{\phi^2}$
Octaèdre	8	6	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tétraèdre	4	4	6	$\sqrt{2}$
Cube	6	8	12	1
Dodécaèdre	12	20	30	$\frac{1}{\phi}$

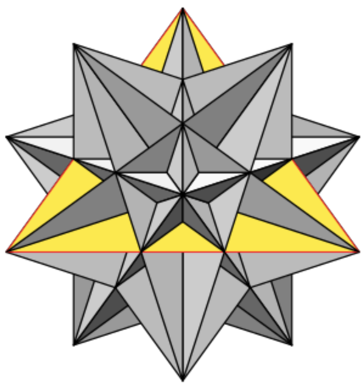
Les polyèdres de Kepler-Poinsot



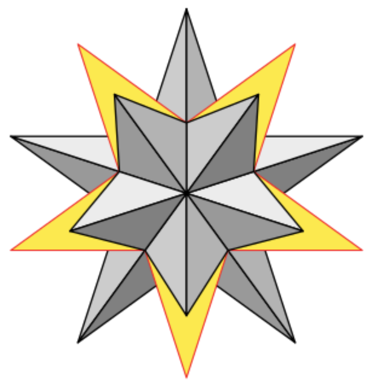
Grand dodécaèdre



Petit dodécaèdre étoilé



Grand icosaèdre



Grand dodécaèdre étoilé

Il existe quatre *polyèdres de Kepler-Poinsot*, et ils sont tous non convexes. Ils semblent avoir beaucoup de faces, d'arêtes et de sommets. Par exemple, si vous voulez construire un *petit dodécaèdre stellaire* en carton, vous devez découper et coller 60 faces. Ce polyèdre a 90 arêtes et 32 sommets. La relation d'Euler est donc encore vraie.

Mais les mathématiciens font preuve de beaucoup d'imagination et de créativité. En effet, regardez à nouveau ce petit dodécaèdre stellaire. Et regardez les cinq triangles jaunes. Ils se trouvent tous dans le même plan. Si l'on complète la partie centrale manquante (qui a la forme d'un pentagone), on obtient une étoile régulière à cinq branches, appelée *pentagramme*. Les mathématiciens peuvent donc décider de considérer que la partie centrale de l'étoile n'est pas manquante, mais qu'elle se trouve à l'intérieur du polyèdre! Il en va de même pour toutes les autres petites faces. Par groupe de cinq, elles appartiennent à d'autres pentagrammes dont la partie centrale se trouve à l'intérieur du polyèdre. Comme nous avons commencé avec 60 faces, on a en tout douze pentagrammes. Nous pouvons donc considérer ce petit dodécaèdre stellaire comme ayant douze faces généralisées (pentagrammes) qui peuvent se croiser ! Les mathématiciens décident d'élargir la définition de polyèdre, afin de permettre une telle construction, avec des faces qui peuvent se croiser en dehors des arêtes. Maintenant, essayez de comprendre quelle est la partie intérieure de ce polyèdre généralisé. Il s'agit d'une union de douze pentagones, donc d'un dodécaèdre ! Cela signifie que le petit dodécaèdre stellaire est une double couverture de la partie centrale !

Vous êtes maintenant invités à analyser de la même manière les trois autres polyèdres de Kepler-Poinsot. Les deux *dodécaèdres stellaires* ont douze faces, qui ont la forme de pentagrammes. Le *grand icosaèdre* a vingt faces triangulaires qui se croisent.

Vous pouvez essayer de construire certains de ces polyèdres à l'aide de pics à brochettes et/ou de carton.

Autres ressources

- Si vous comprenez l'anglais, vous pouvez lire l'histoire fantastique du carrousel des polyèdres en ligne, avec des applications interactives et des films.
- L'association portugaise Atractor propose de nombreuses animations et images de polyèdres (et de leurs réseaux, propriétés, etc.) sur son site internet.

Créez et partagez!
Partagez les découvertes des participants avec les hashtags **#idm314polyhedra** et **#idm314**.