Poliedros artísticos

Participantes:

A partir de 14 años, dependiendo de la actividad.
No se necesitan conocimientos previos de matemáticas, pero a medida que avancemos en las actividades, aparecerán conceptos matemáticos como polígonos, polígonos regulares y poliedros, así como la suma de los ángulos de un triángulo, el número áureo, construcciones geométricas básicas o coordenadas cartesianas.

Materiales:

Para los modelos físicos utilizaremos palillos largos tipo brochetas de madera y gomas elásticas. Opcionalmente, los palillos se pueden pintar de colores. En algunas construcciones, puede resultar útil hacer poliedros con hilos o cuerda fina. También puedes construir poliedros con cartulina de colores.

Puede ser útil usa un proyector para mostrar algunas imágenes en el aula. Algunas actividades incluyen enlaces a animaciones y aplicaciones interactivas en línea.

1. Poliedros regulares.

Preguntas preliminares:

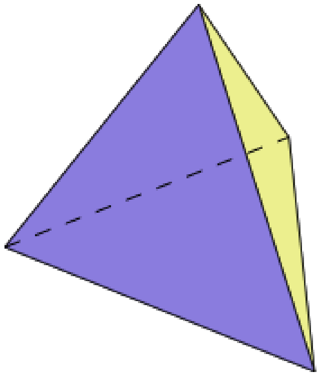
¿Qué es un *poliedro*?

- Es un sólido tridimensional limitado por caras planas. Las *caras* son polígonos planos.
- Los segmentos de recta donde se encuentran dos caras se llaman *aristas*.
- Los puntos donde se encuentran tres o más caras se llaman *vértices*.

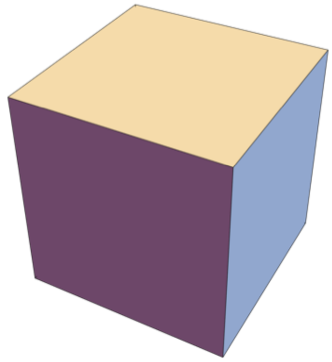
¿Qué es un poliedro regular?

- Las caras son polígonos regulares idénticos. (Un polígono es regular si todos sus lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos son iguales).
- Y cada vértice es adyacente al mismo número de caras.
- Y el poliedro es *convexo*.

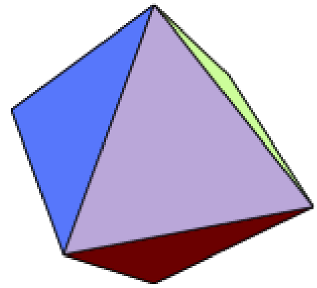
Los cinco poliedros regulares:



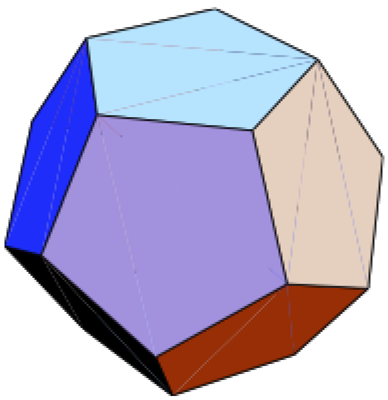
[Tetraedro]



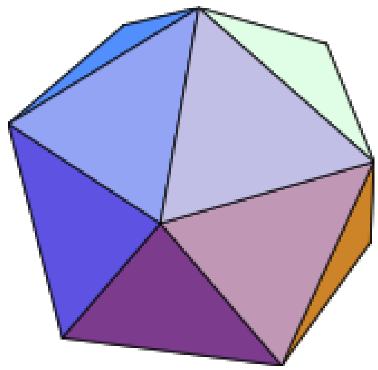
[Hexaedro (Cubo)]



[Octaedro]



[Dodecaedro]

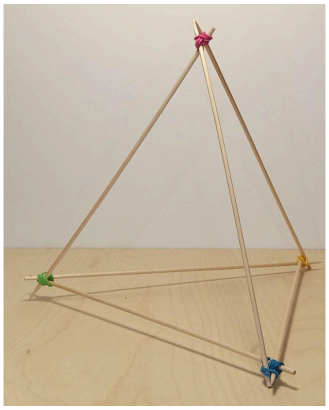
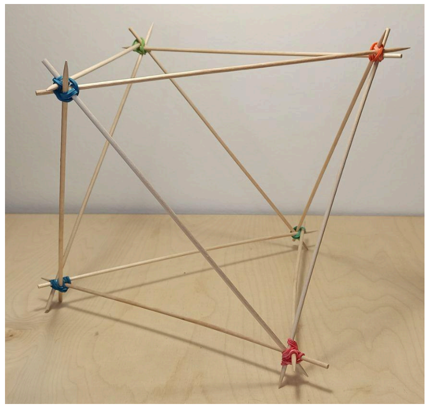
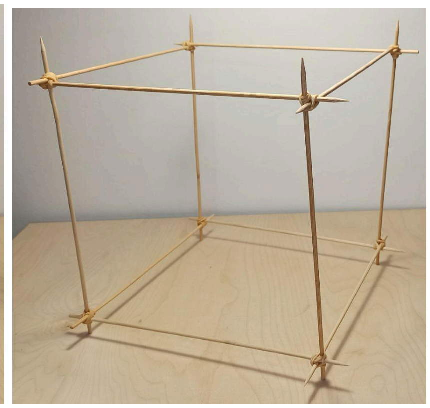
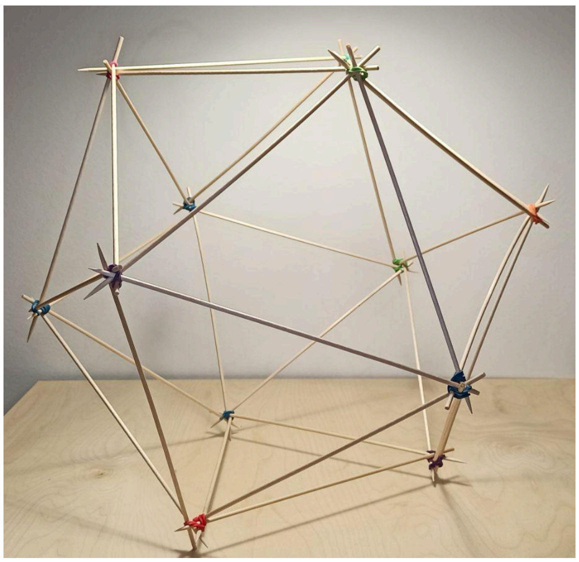
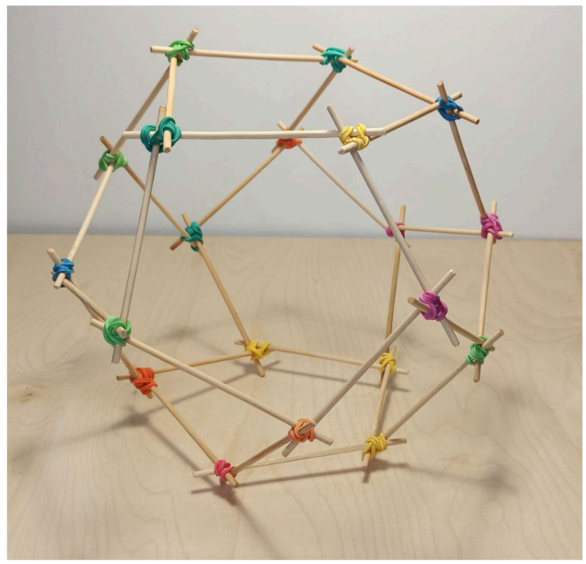


[Icosaedro]

Estos son los únicos cinco poliedros regulares, también conocidos como *sólidos platónicos* (haz clic en los enlaces para manipular los poliedros).

A partir de las imágenes y del número y tipo de caras, deduce el número de aristas y vértices (cuántos palillos y gomas necesitarás) y construye los cinco poliedros regulares.

Poliedro regular	Tipo de cara	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
Icosaedro	triángulo	20	12	30
Octaedro	triángulo	8	6	12
Tetraedro	triángulo	4	4	6
Cubo	cuadrado	6	8	12
Dodecaedro	pentágono	12	20	30

Observa la relación de Euler:

$$C + V = A + 2$$

donde C, V y A son el número de caras, vértices y aristas, respectivamente.
Además, observa que existe una estrecha relación entre:

- El octaedro y el cubo.
- El icosaedro y el dodecaedro.
- El tetraedro y él mismo.

(Compara el número de vértices, aristas y caras).

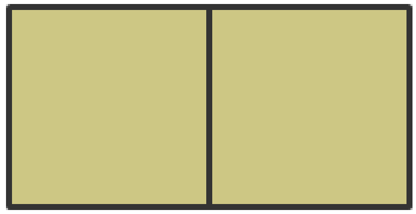
Estos pares de poliedros son llamados *duales*: Los vértices de uno corresponden a las caras del otro, y viceversa. Puedes obtenerlos colocando los vértices de uno en el centro de las caras del otro. Las aristas se corresponden una a una, pero están giradas 90º en el poliedro dual.

Sólo cinco poliedros regulares

Demostremos que sólo hay cinco poliedros regulares. Puedes utilizar papel o cartulina y cinta adhesiva para construir las figuras del argumento.

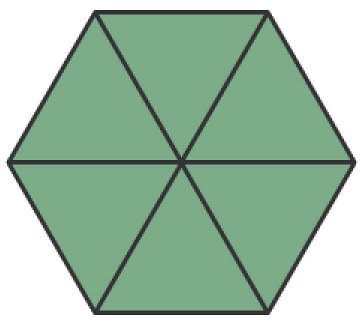
Sabemos que en un poliedro regular todas las caras son polígonos regulares iguales, y supongamos que n es el número de caras que coinciden en un vértice.

Paso 1: si $n = 2$, explica por qué no es posible construir ningún tipo de poliedro.



Paso 2: Ya sabemos que $n \geq 3$. Intentemos construir todos los poliedros regulares posibles, empezando por usar triángulos equiláteros.

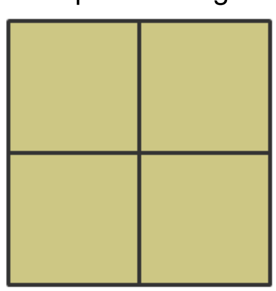
- Si $n = 3$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 3 triángulos en cada vértice.
- Si $n = 4$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 4 triángulos en cada vértice.
- Si $n = 5$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 5 triángulos en cada vértice.
- Si $n = 6$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?



- Si $n > 6$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?

Paso 3. Pasemos a los cuadrados.

- Si $n = 3$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 3 cuadrados en cada vértice.
- Si $n = 4$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?



- Si $n > 4$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?

Paso 4. Pasemos a los pentágonos regulares.

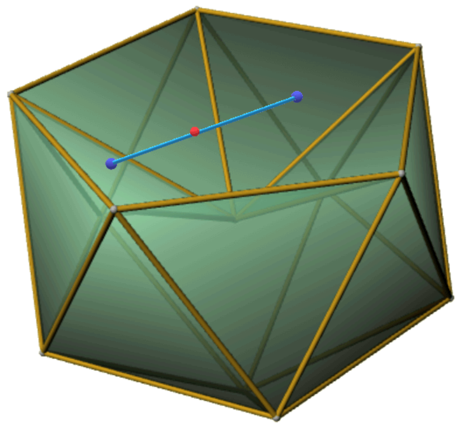
- Si $n = 3$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 3 pentágonos en cada vértice.
- Si $n \geq 4$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?

Paso 5. Finalmente, usemos hexágonos. Explica por qué no sería posible construir un poliedro regular usando hexágonos regulares.

Explica por qué no sería posible construir un poliedro regular usando heptágonos regulares (7 lados), octágonos regulares (8 lados), etc.

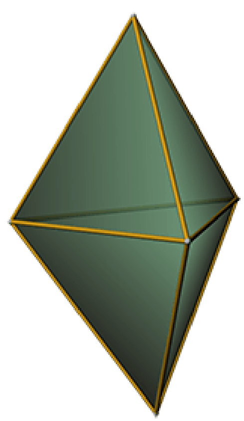
Poliedros no regulares

Un poliedro es convexo si, para cada par de puntos de las caras, el segmento que une los puntos está enteramente contenido en el poliedro.



Ejemplo de poliedro no convexo (haz clic aquí para manipular el poliedro)

En un poliedro regular todos los vértices son idénticos (tienen el mismo número de caras coincidentes).



Ejemplo de poliedro con todas sus caras polígonos regulares, pero no poliedro regular (en algunos vértices coinciden tres caras y en otros cuatro). (haga clic aquí para manipular el poliedro).

La definición de poliedros regulares prohíbe estos casos.

- Puedes jugar con esta aplicación [Mathina] para distinguir entre poliedros convexos y no convexos.
- Puedes truncar, estrellar y realizar otras modificaciones a los poliedros para obtener nuevos sólidos con esta aplicación [IMAGINARY GitHub].

La relación de Euler

Ya hemos observado una relación entre el número de caras, aristas y vértices en los sólidos platónicos. Esta relación se aplica a muchos más poliedros no regulares:

Relación de Euler. Para cualquier poliedro equivalente a la esfera, se cumple la siguiente relación

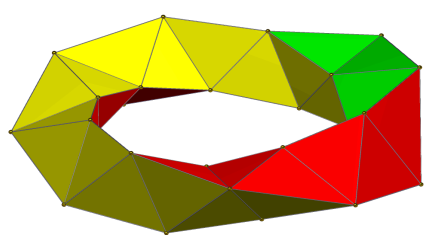
$$V - A + C = 2,$$

dónde V es el número de vértices, A es el número de aristas, y C es el número de caras.

De manera más general, la característica de Euler, denotada con la letra griega χ, se define como

$$\chi = V - A + C.$$

El teorema establece que χ = 2 para la mayoría de los poliedros que se te ocurran. Las excepciones, es decir, los poliedros que no son equivalentes a una esfera, incluyen, por ejemplo, un toro (forma de rosquilla) poliédrico o los poliedros de Kepler-Poinsot (cuando se piensa que tienen caras que se cruzan) porque rodean la esfera más de una vez. Todos los poliedros convexos tienen χ = 2.

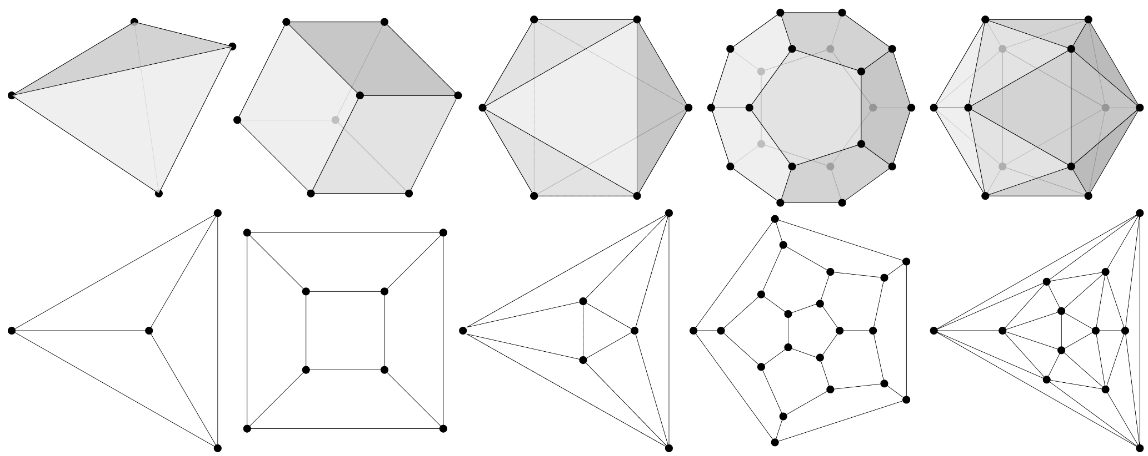


Un poliedro no regular y no convexo con forma de toro, con χ = 0.

Probemos la relación de Euler.

Paso 1. Dado que la relación no involucra ángulos, longitudes u otras propiedades métricas (que dependan de distancias), podemos deformar el esqueleto (es decir, las aristas y los vértices) como un grafo flexible y aplanarlo en un plano bidimensional. Demuestra que se puede dibujar el esqueleto de un poliedro convexo sobre un plano, sin que los bordes se crucen, lo que produce un grafo *planar*. Un grafo se llama *planar* cuando sus aristas no se cruzan (se tocan sólo en sus extremos, que son vértices).

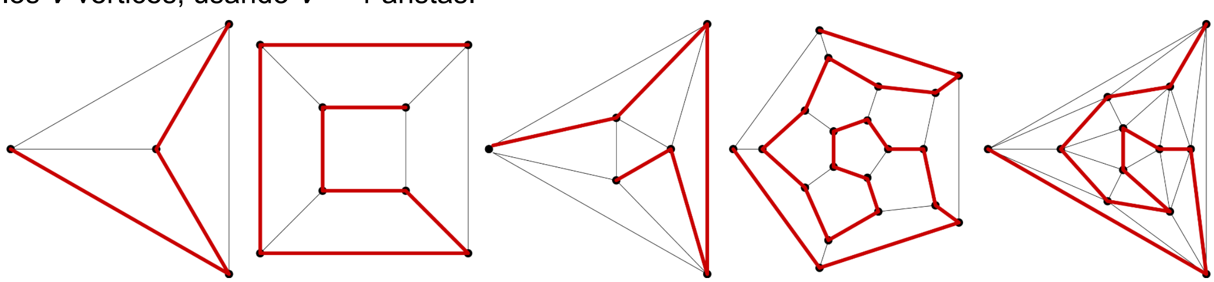
Por ejemplo, podemos hacerlo con los sólidos platónicos:



Observa que cada grafo tiene el mismo número de vértices, aristas y caras que el poliedro original. Las “caras” son las regiones cerradas, junto con la región exterior ilimitada.

Por tanto, podemos probar la relación de Euler para grafos planos.

Paso 2. Demuestra que en cada grafo planar podemos encontrar un camino que conecte todos los V vértices, usando $V - 1$ aristas.



Paso 3. Supongamos que eliminamos todas las aristas excepto las del camino que conecta todos los vértices. Demuestra que para este grafo tenemos $\chi = 2$.

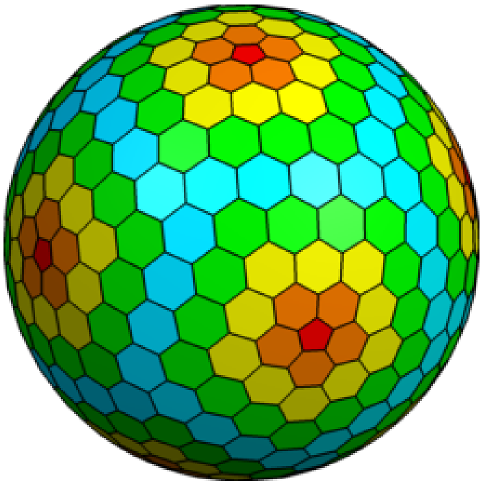
Paso 4. Volvemos a agregar las aristas que hemos eliminado en el paso anterior, una por una. Demuestra que al añadir cada arista, la característica de Euler permanece $\chi = 2$, hasta recuperar el grafo de nuestro poliedro original.

Retos adicionales

- Los poliedros con pentágonos y hexágonos se han utilizado para el diseño arquitectónico, por ejemplo, la *Biosfera de Montreal* diseñada por Buckminster Fuller en 1967. En la biosfera de Montreal, las caras son triángulos ensamblados con 5 o 6 aristas en cada vértice. Utilizando la fórmula de Euler, demuestra que (si la esfera estuviera completa) siempre hay exactamente doce vértices unidos a cinco triángulos.

La biosfera de Montreal
Imagen: Cédric THÉVENET, vía Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

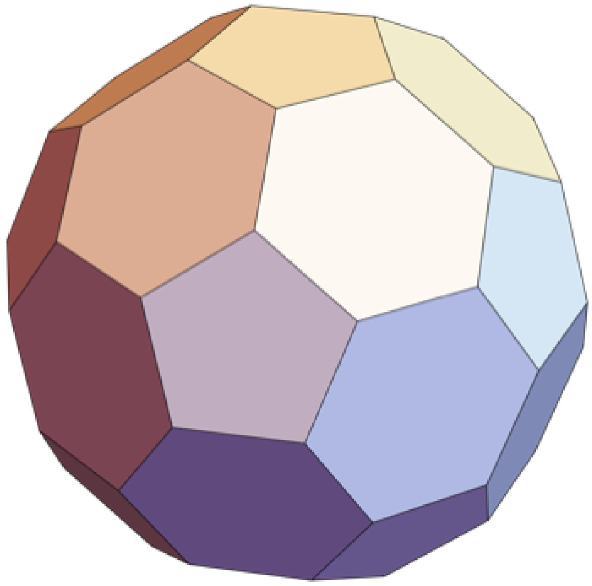
- *Poliedros de Goldberg*. Son poliedros cuyas caras son todas pentágonos y hexágonos y tienen las mismas simetrías que el icosaedro. Utilizando la fórmula de Euler, demuestra que cualquier poliedro cuyas caras sean pentágonos y hexágonos, tiene exactamente doce pentágonos. (Ten en cuenta que el icosaedro tiene exactamente 12 vértices y cinco triángulos están unidos a cada vértice).



Un poliedro de Goldberg

Imagen: Tomruen, vía Wikimedia Commons, CC BY-SA

Otro poliedro de Goldberg es el icosaedro truncado, el balón de fútbol que conocemos bien.



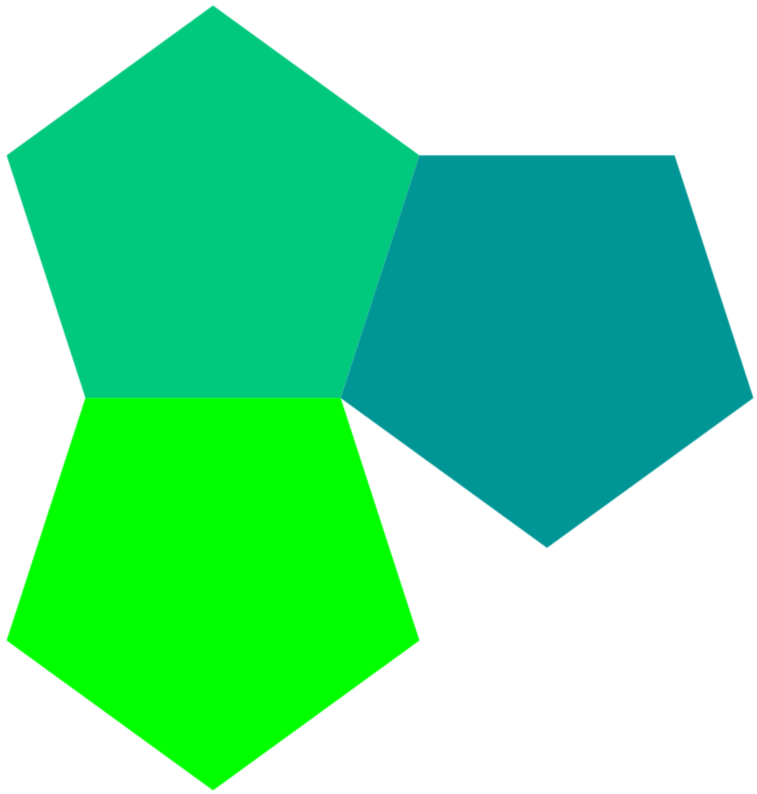
El icosaedro truncado

El Teorema de Descartes

Cuando construimos un poliedro, ensamblamos caras en cada vértice. Podemos contar la suma de los ángulos de las caras adyacentes a un vértice. Esta suma es

- Menor que 360º si el poliedro es convexo cerca de ese vértice;
- Igual a 360º si el poliedro es plano cerca de ese vértice;
- Mayor que 360º si el poliedro es cóncavo cerca de ese vértice.

La diferencia entre 360º y la suma de los ángulos en un vértice se llama *defecto en ese vértice.* (el defecto es negativo en el tercer caso).

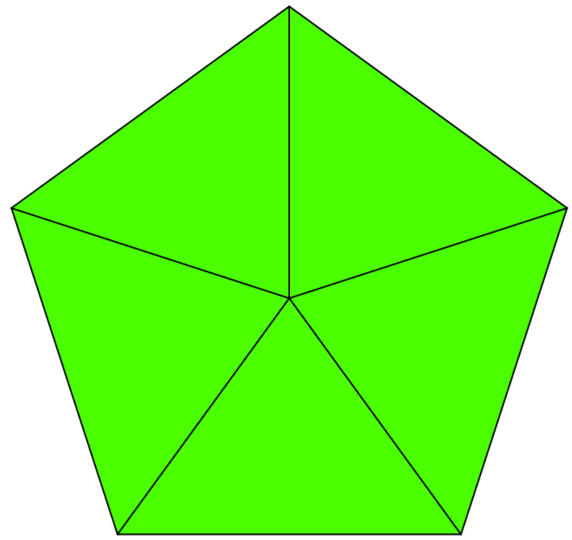


El defecto en un vértice de un dodecaedro es de 360º – 3 x 108º = 36º.

Teorema de Descartes: Para un poliedro, la suma de los defectos en cada vértice, también llamada *defecto total*, es igual a 720º.

a) Verifica el teorema de Descartes en los poliedros regulares u otros poliedros, como el icosaedro truncado.
b) Demuestra el teorema de Descartes utilizando la fórmula de Euler:

Paso 1: Primero, podemos reducir el problema al de un poliedro con caras triangulares. Para ello basta con coger un punto interior dentro de cada cara poligonal y unirlo a todos los vértices de la cara, dividiendo así la cara en triángulos.



Si una cara tiene *n* bordes, el proceso agrega un vértice (el punto interior), *n* aristas que unen el punto interior a los vértices, y una cara se reemplaza por *n* caras triangulares. De ahí la fórmula de Euler ($V + F = Y + 2$) sigue siendo válida
.
Paso 2: Demuestra el teorema de Descartes para un poliedro con caras triangulares. Sea D la suma de los defectos, V el número de vértices, A el número de aristas, y C el número de caras. Entonces:

$$A = 3/2\ C.$$

ya que cada cara tiene tres aristas y cada arista se cuenta dos veces.

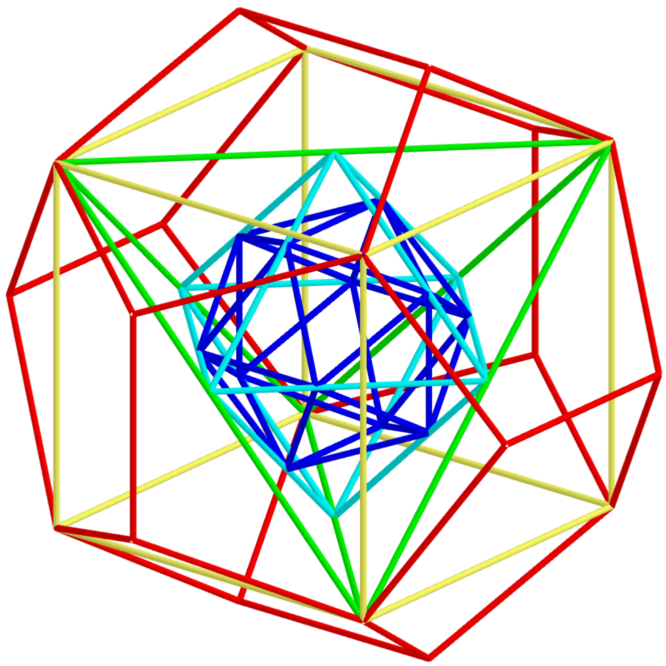
$$D = 360º\ V - 180º\ C.$$

Por lo tanto,

$$D = 180º(2V - C) = 180º(2V + 2C - 3C) = 360º(V + F - 3/2\ C)$$
$$= 360º(V + F - C) = 360º \times 2 = 720º.$$

Construir el omnipoliedro

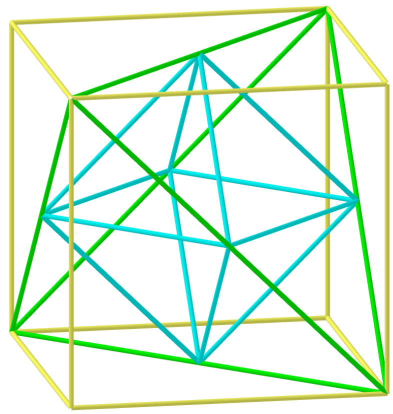
Una disposición de los cinco poliedros regulares inscritos entre sí que muestra algunas de sus relaciones y propiedades a veces se denomina *omnipoliedro* (no es un solo poliedro, sino una configuración de poliedros).

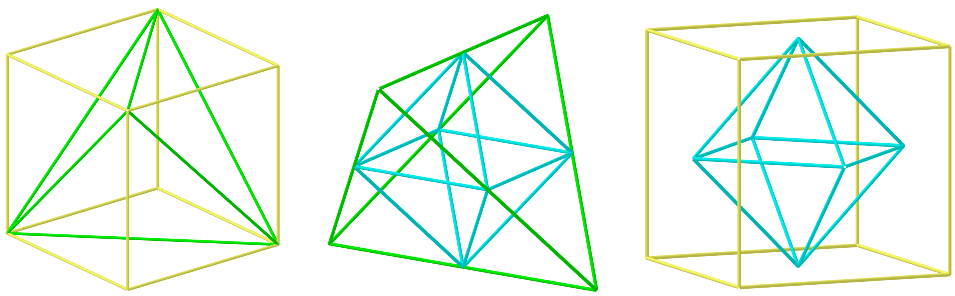


Proponemos tres construcciones parciales de poliedros inscritos. Puedes hacer cualquiera de estas, o combinar las tres para construir un omnipoliedro. Puedes utilizar palillos de madera y gomas elásticas. El icosaedro también puede estar hecho de cuerda una vez construido el octaedro. También se puede comprar un kit en Zometool.

El cubo, el tetraedro y el octaedro.

Construye un cubo. Añade una diagonal en cada una de las seis caras, construyendo un tetraedro: para ello, es necesario elegir diagonales cuyos extremos estén en cuatro de los ocho vértices del cubo, de manera que a cada uno de estos cuatro vértices se unan tres diagonales (hay dos formas de hacerlo.) Une los puntos medios de las aristas del tetraedro para construir un octaedro.



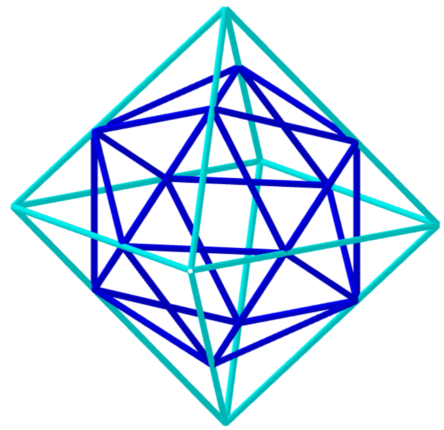


Dibuja esta construcción en papel, constrúyela con palillos y demuestra matemáticamente que funciona. Calcula las longitudes de las aristas del tetraedro y del octaedro, en función de la del cubo.

Observa que las aristas del octaedro están en el centro de las caras del cubo, por lo que podemos ver que el octaedro es el dual del cubo. Obtienes el tetraedro dual si eliges las otras diagonales de las caras del cubo.

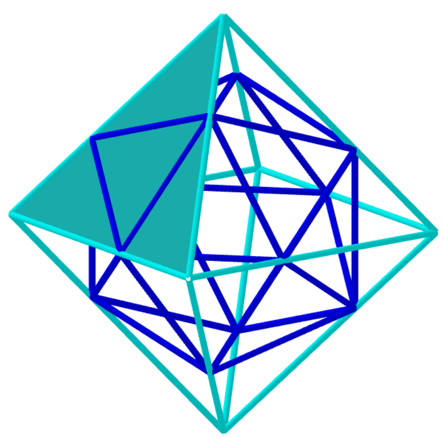
El icosaedro inscrito en el octaedro.

Un icosaedro regular se puede inscribir en un octaedro regular de modo que cada uno de los doce vértices del icosaedro se encuentre en una de las doce aristas del octaedro, y estos vértices dividen las aristas en una proporción áurea ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618...$ es la *proporción áurea*, dada por la ecuación $\frac{\phi}{1} = \frac{\phi+1}{\phi}$, o equivalentemente $\phi^2 = \phi + 1$),

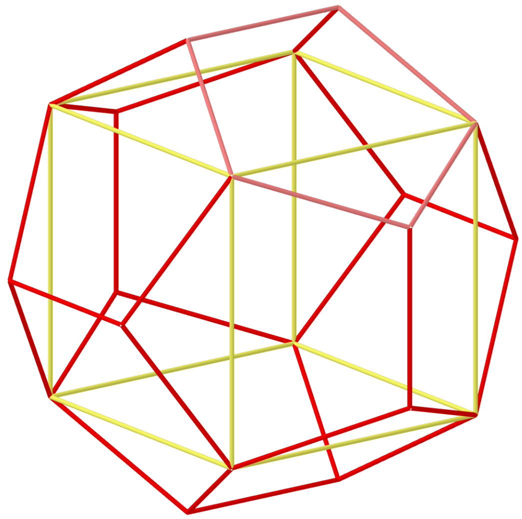


Dibuja esta construcción en papel, constrúyela con palillos y demuestra matemáticamente que funciona.

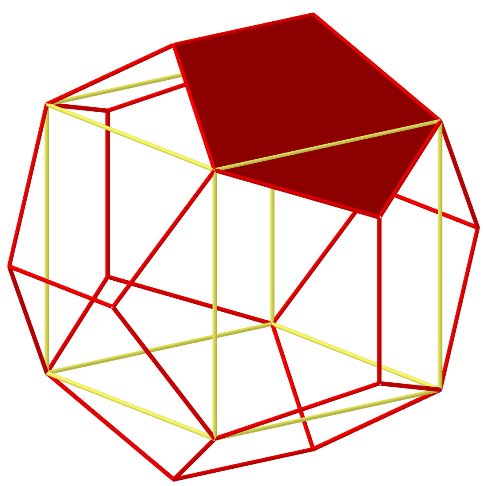
Indicación: Cada cara del octaedro contiene una cara triangular del icosaedro. Calcula la longitud de su lado. El resto de las aristas del icosaedro se encuentran en el interior del octaedro. Demuestra que su longitud es la misma que la de las aristas construidas anteriormente.



El dodecaedro circunscrito al cubo.



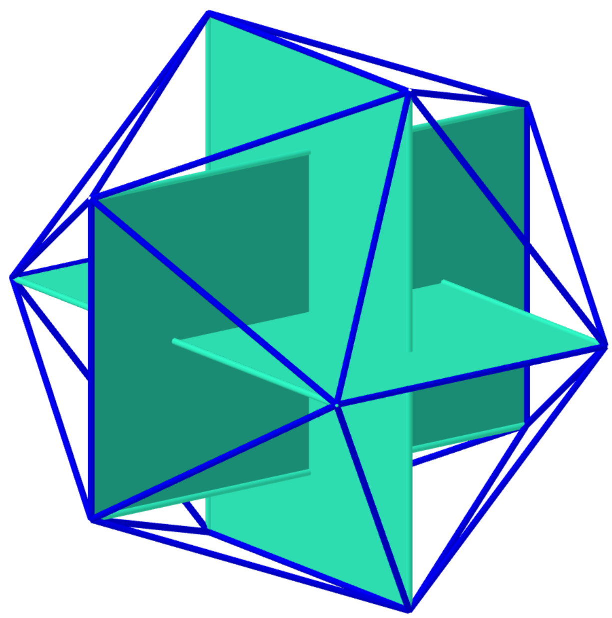
Toma un cubo. Sobre cada cara cuadrada, construye un “tejado” hecho de dos triángulos en lados opuestos y dos trapecios en lados opuestos, usando cinco palillos (primero construye los dos triángulos agregando dos palillos a cada uno de los dos lados opuestos, luego une los vértices libres con el palillo restante). Construye los tejados en cada una de las caras del cubo de manera que un trapecio se una a un triángulo. Si la longitud de las nuevas aristas es exactamente $1/\phi$ de la arista del cubo, entonces el trapecio y el triángulo correspondiente alrededor de la arista común del cubo se alinearán perfectamente para formar un pentágono regular, y el resultado global será un dodecaedro regular.



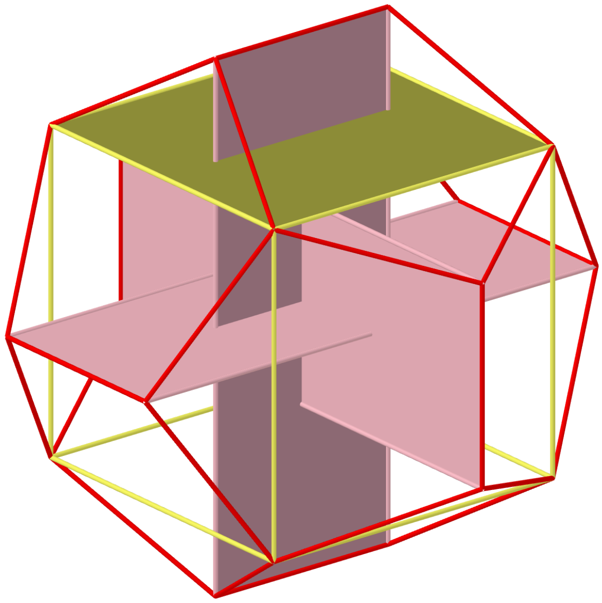
Dibuja esta construcción en papel, constrúyela con palillos y demuestra matemáticamente que funciona.

Retos adicionales

- Toma tres rectángulos áureos (en un *rectángulo áureo,* la longitud es ϕ veces la anchura). Corta una ranura en el centro de cada uno de ellos (del tamaño de la anchura de los rectángulos) y ensámblalos de manera que cada rectángulo quede perpendicular a los otros dos. Los doce vértices están dispuestos como en un icosaedro. Pruébalo y constrúyelo.
  Nota: La mayoría de las tarjetas de crédito y de visita son rectángulos áureos. Puedes usar estas tarjetas y un poco de hilo para hacer los bordes.



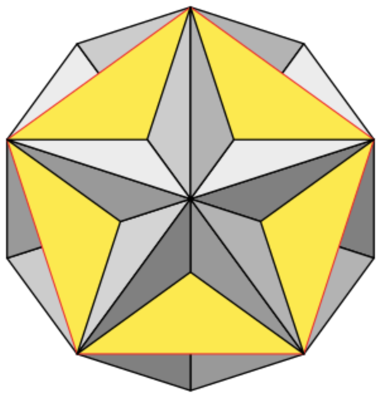
- Toma tres rectángulos cuya longitud sea ϕ^2 veces la anchura. Corta una ranura en el centro de cada uno de ellos y ensamblalos de manera que cada rectángulo quede perpendicular a los otros dos. Inserta esta construcción en el centro de un cubo de lado ϕ, manteniendo los rectángulos paralelos a las caras. Entonces, los doce vértices de los tres rectángulos, más los ocho vértices del cubo, forman el conjunto de vértices de un dodecaedro regular.



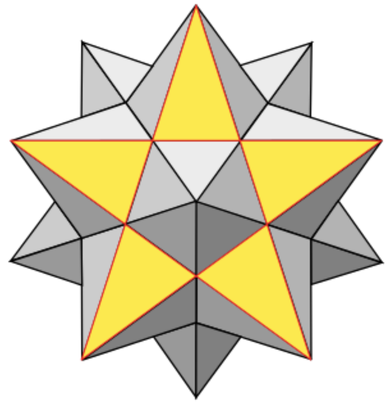
- Construye un modelo en el programa GeoGebra calculando las coordenadas cartesianas de todos los vértices. Solución:
    - Cubo: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
    - Tetraedro: el subconjunto de vértices del cubo, tal que hay un número par de signos menos.
    - Octaedro: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$
    - Icosaedro: $\left(\pm \frac{1}{\phi}, 0, \pm \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)\right)$, y sus permutaciones cíclicas, a saber $\left(0, \pm \left(1 - \frac{1}{\phi}\right), \pm \frac{1}{\phi}\right)$ y $\left(\pm \left(1 - \frac{1}{\phi}\right), \pm \frac{1}{\phi}, 0\right)$.
    - Dodecaedro: Los del cubo, junto con $\left(\pm \frac{1}{\phi}, 0, \pm \phi\right)$, y sus permutaciones cíclicas, a saber $\left(0, \pm \phi, \pm \frac{1}{\phi}\right)$ y $\left(\pm \phi, \pm \frac{1}{\phi}, 0\right)$

Poliedro regular	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas	Longitud de la arista
Icosaedro	20	12	30	$\frac{1}{\phi^2}$
Octaedro	8	6	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tetraedro	4	4	6	$\sqrt{2}$
Cubo	6	8	12	1
Dodecaedro	12	20	30	$\frac{1}{\phi}$

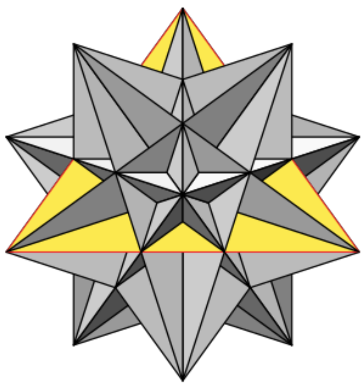
Los poliedros de Kepler-Poinsot



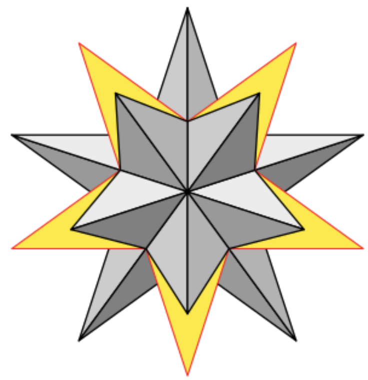
Gran dodecaedro



Pequeño dodecaedro estrellado



Gran icosaedro



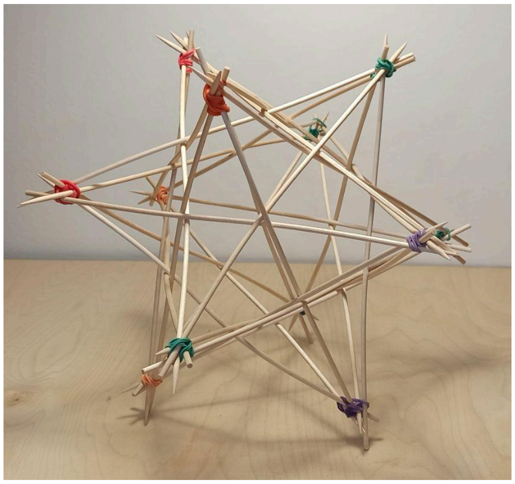
Gran dodecaedro estrellado

Hay cuatro poliedros de Kepler-Poinsot y todos ellos no son convexos. Parecen tener muchas caras, aristas y vértices. Por ejemplo, para construir un *pequeño dodecaedro estrellado* de cartón es necesario cortar y pegar 60 caras. Este poliedro tiene 90 aristas y 32 vértices. Por tanto, la relación de Euler vuelve a ser cierta.

Pero los matemáticos (y las matemáticas) tienen mucha imaginación y creatividad. De hecho, mira nuevamente el pequeño dodecaedro estrellado. Fíjate en los cinco triángulos amarillos. Todos se encuentran en el mismo plano. Si vamos a completar la parte media que falta (que tiene forma de pentágono, lo que tenemos es una estrella regular de cinco puntas, llamada *pentagrama*. Por lo tanto, se puede considerar la parte media de la estrella, no como faltante, sino como dentro del poliedro. Lo mismo ocurre con todas las demás caras pequeñas. En grupos de cinco, pertenecen a otros pentagramas, cuya parte media se encuentra dentro del poliedro. Como empezamos con 60 caras, el resultado será doce pentagramas. Así, podemos considerar que este pequeño dodecaedro estrellado tiene doce (de ahí el nombre) *caras generalizadas* en forma de pentagramas, ¡que pueden cruzarse! En matemáticas tenemos la posibilidad de cambiar la definición de poliedro para permitir tal construcción, y entonces se puede estudiar qué sucede con otras propiedades, como la relación de Euler, con esta nueva definición.

Te invitamos a observar de manera similar los otros tres poliedros de Kepler-Poinsot. Los dos *dodecaedros estrellados* Tienen doce caras, con forma de pentagramas. El *gran dodecaedro* tiene doce caras pentagonales que se cruzan. El *gran icosaedro* tiene veinte caras triangulares que se cruzan.

Puedes intentar construir algunos de estos poliedros con palillos y/o cartulina.



Otros recursos

- Puedes leer una historia de fantasía sobre poliedros en el libro interactivo Mathina, con aplicaciones y películas interactivas.
- La asociación portuguesa Atractor tiene muchas animaciones e imágenes de poliedros (y sus redes, propiedades, etc) en su sitio web.
- Zometool. La obsesión de Kepler.
  https://www.zometool.com/products/keplers-obsession.html

¡Crea y comparte!
Comparta los hallazgos de los participantes usando los hashtags. **#idm314poliedros** y **#idm314**.