ΔΙΕΘΝΗΣ ΗΜΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 14 ΜΑΡΤΙΟΥ

Δραστηριότητες χαρτιού

Σε αυτό το έγγραφο θα βρείτε διάφορες δραστηριότητες που χρησιμοποιούν το χαρτί:

1. Χρωματισμός χαρτών
2. Ψάρι οκτάεδρο
3. Ψηφιδωτά
4. Γέφυρες του Königsberg
5. Αναδίπλωση και κοπή

Συμμετέχοντες:

Ηλικίες 10 - 12 ετών και άνω (ανάλογα με τη δραστηριότητα).
Δεν απαιτούνται προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις.

Προετοιμασίες:

Εκτυπωμένα πρότυπα (ένα για κάθε συμμετέχοντα), μολύβια ζωγραφικής.
Ορισμένες δραστηριότητες απαιτούν ψαλίδι και κόλλα ή ταινία.

1η Δραστηριότητα. Χρωματισμός χαρτών:

Οι κανόνες για το χρωματισμό των διαφόρων περιοχών είναι οι εξής:
Δύο τμήματα (χώρες) που μοιράζονται μια κοινή ακμή δεν μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα.
Ζητήστε από τους συμμετέχοντες να χρωματίσουν κάθε σχήμα με όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα.
Επιλογές: Έχετε πρόχειρους εκτυπωμένους τοπικούς χάρτες. Παίξτε με αυτή τη διαδραστική εφαρμογή για το χρωματισμό χαρτών:
https://mathigon.org/course/graph-theory/map-colouring

2η Δραστηριότητα. Οκτάεδρο ψαριών:

Το πρότυπο δίνει το δίχτυ (σε δύο μέρη) για ένα οκτάεδρο διακοσμημένο με ψηφιδωτά ψάρια. Εκτυπώστε δύο αντίγραφα, κόψτε κατά μήκος των συνεχών γραμμών και διπλώστε στις διακεκομμένες γραμμές. Χρωματίστε αν θέλετε και κολλήστε ή κολλήστε με ταινία τα δύο μισά μαζί.

Εισάγετε την έννοια του πολύεδρου (κορυφές, ακμές, όψεις) και βρείτε παραδείγματα γύρω σας.
Κάντε ερωτήσεις:
Πόσες όψεις, ακμές και κορυφές έχει το χάρτινο γλυπτό και πόσα ψάρια; Πόσα στόματα συναντώνται σε κάθε κορυφή; Πόσες ουρές συναντώνται και πού;
Πού συναντώνται τα πτερύγια; (Δύο στόματα θα συναντηθούν σε κάθε κορυφή, τρεις ουρές στο κέντρο τεσσάρων όψεων και τρία πτερύγια στο κέντρο των άλλων τεσσάρων όψεων). Ποια άλλα κλειστά γλυπτά μπορείτε να κατασκευάσετε από (ισόπλευρα) τρίγωνα;
Μετρήστε τον αριθμό των όψεων (F), των ακμών (E) και των κορυφών (V) διαφόρων κυρτών πολυέδρων. Βάλτε τα σε έναν πίνακα ορατό σε όλους και προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο του πολυέδρου του Euler: $V - E + F = 2$. Δώστε συμβουλές όταν χρειάζεται (π.χ. χρησιμοποιήστε μόνο πρόσθεση και αφαίρεση).

3η Δραστηριότητα. Στρωματογραφίες:

Βάλτε τους συμμετέχοντες να χρωματίσουν τις δύο εικόνες του προτύπου. Μιλήστε για τις συμμετρίες καθρέφτη.
Ρωτήστε, πώς θα συνεχιζόταν το μοτίβο μετά τις άκρες. Αναζητήστε συμμετρίες σε πράγματα που σας περιβάλλουν. Σχεδιάστε το δικό σας μοτίβο, δημιουργήστε μπλουζάκια με το σχέδιό σας...

4η Δραστηριότητα. Γέφυρες του Königsberg:

Ένας ποταμός χωρίζει μια πόλη σε ξεχωριστές περιοχές που συνδέονται με γέφυρες. Είναι δυνατόν να περπατήσετε γύρω από την πόλη διασχίζοντας όλες τις γέφυρες ακριβώς μία φορά (και όχι περισσότερες από μία); Μπορείτε να ξεκινήσετε και να τερματίσετε οπουδήποτε, όχι απαραίτητα στο ίδιο σημείο.
Προσπαθήστε να βρείτε μια έγκυρη διαδρομή σχεδιάζοντας στους χάρτες που παρέχονται.

5η Δραστηριότητα. Διπλώστε και κόψτε:

Πάρτε ένα κομμάτι χαρτί, διπλώστε το επίπεδο πολλές φορές και κάντε ένα μόνο εντελώς ευθύγραμμο κόψιμο. Ξεδιπλώστε τα κομμάτια.
Τώρα σκεφτείτε: Ποια σχήματα είναι δυνατόν να παραχθούν με ένα τέτοιο κόψιμο;
Προσπαθήστε να διπλώσετε και να κόψετε μερικά από τα παραδείγματα που δίνονται στο πρότυπο.

Δημιουργήστε και μοιραστείτε!
Μοιραστείτε τις ζωγραφιές των συμμετεχόντων και τα πρόσθετα πρότυπα που δημιουργήσατε χρησιμοποιώντας τα hashtag **#idm314paper** και **#idm314**.

Μαθηματικό υπόβαθρο και πηγές:

Χρωματιστοί Χάρτες

Το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων είναι ένα από τα πιο διάσημα θεωρήματα των μαθηματικών. Δηλώνει ότι οποιοδήποτε μοτίβο ή χάρτης μπορεί πάντα να χρωματιστεί με τέσσερα χρώματα (ή λιγότερα).
Είναι σημαντικό επειδή διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1852, αλλά δεν αποδείχθηκε μέχρι το 1976. Για πάνω από εκατόν είκοσι χρόνια μερικά από τα καλύτερα μαθηματικά μυαλά στον κόσμο δεν κατάφεραν να αποδείξουν ένα από τα απλούστερα θεωρήματα των μαθηματικών. Υπήρξαν πολλές λανθασμένες αποδείξεις και ένας ολόκληρος νέος κλάδος των μαθηματικών - γνωστός ως Θεωρία Γραφημάτων - αναπτύχθηκε για να προσπαθήσει να λύσει το θεώρημα. Κανείς όμως δεν μπόρεσε να αποδείξει το θεώρημα μέχρι που οι Appel και Haken απέδειξαν το θεώρημα το 1976 με τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Ορισμένοι πιστεύουν ότι, αν και η απόδειξή τους ήταν σωστή, ήταν εξαπάτηση η χρήση υπολογιστή. Εσείς τι πιστεύετε;

Ψάρι οκτάεδρο

Ένα πολύεδρο είναι ένα κλειστό σχήμα στον τρισδιάστατο χώρο με επίπεδες επιφάνειες, ευθείες ακμές και αιχμηρές γωνίες (κορυφές). Παραδείγματα είναι ο κύβος ή η πυραμίδα. Το οκτάεδρο είναι ένα άλλο παράδειγμα (φανταστείτε δύο τετράγωνες πυραμίδες κολλημένες μεταξύ τους στην τετράγωνη όψη). Μπορείτε να το φανταστείτε να ζει μέσα σε έναν κύβο (οι γωνίες του αγγίζουν το κέντρο των όψεων του κύβου. Μπορείτε εξίσου καλά να φανταστείτε έναν κύβο να ζει μέσα σε ένα οκτάεδρο. Ονομάζονται δίδυμα σχήματα. Προσπαθήστε να βρείτε το δίδυμο της πυραμίδας.
Ένα πολύεδρο ονομάζεται κυρτό, αν μένετε μέσα στο αντικείμενο όταν ταξιδεύετε από οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας σε οποιοδήποτε άλλο σημείο της επιφάνειας σε ευθεία γραμμή. Ο κύβος, η πυραμίδα και το οκτάεδρο είναι παραδείγματα κυρτών πολυέδρων.
Τα πολύεδρα μπορεί να μοιάζουν πολύ διαφορετικά μεταξύ τους και μπορεί να έχουν πολλές ή λίγες επιφάνειες, ακμές και κορυφές. Ωστόσο, υπάρχει μια ιδιότητα που είναι η ίδια (αναλλοίωτη) για όλα τα κυρτά πολύεδρα: Πάρτε ένα κυρτό πολύεδρο και μετρήστε τις επιφάνειές του (F), τις ακμές (E) και τις κορυφές/γωνίες (V). Αν υπολογίσετε το $V - E + F$, θα έχετε πάντα τον ίδιο αριθμό, δηλαδή 2, ανεξάρτητα από το ποιο πολύεδρο επιλέξατε. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται Χαρακτηριστικό του Euler και διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον διάσημο μαθηματικό Leonhard Euler το 1758. Σημείωση: Η χαρακτηριστική Euler μπορεί να είναι διαφορετική από το 2 για μη κυρτά πολύεδρα, αν αυτά τυχαίνει να έχουν μία ή περισσότερες οπές. Για κυρτά πολύεδρα, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν οπές.

Άλλες επιλογές:

- Παίξτε το παιχνίδι MatchTheNet: https://www.matchthenet.de/
- Κατασκευάστε άλλα πολύεδρα χρησιμοποιώντας αυτά τα δίκτυα: https://imaginary.org/sites/default/files/matchthenet-polyhedra-nets.pdf
- Ρίξτε μια ματιά σε αυτές τις εικόνες πολυέδρων και δημιουργήστε τα αντίστοιχα δίκτυα: https://imaginary.org/sites/default/files/matchthenet-polyhedra-images.pdf
- Ελέγξτε το μάθημα Mathigon για τα πολύεδρα: https://mathigon.org/course/polyhedra/polygons
- Υιοθετήστε ένα πολύεδρο: https://www.polytopia.eu/en/

Ψηφιδωτά

Ένα ψηφιδωτό είναι ένα μοτίβο σε μια επίπεδη επιφάνεια (ιδανικά ένα απείρως εκτεταμένο επίπεδο) που αποτελείται από (γεωμετρικά) σχήματα που ονομάζονται πλακάκια χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Εάν το μοτίβο επαναλαμβάνεται, ονομάζεται περιοδικό πλακίδιο. Διαφορετικά είναι μη περιοδικό.

Ιστορικά, τα ψηφιδωτά χρησιμοποιήθηκαν στην Αρχαία Ρώμη και στην ισλαμική τέχνη.

Τα μοτίβα που σχηματίζονται από περιοδικά πλακίδια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε 17 ομάδες ταπετσαριών.

Άλλες επιλογές:

- Σχεδιάστε τη δική σας ταπετσαρία online χρησιμοποιώντας το iOrnament: https://imaginary.github.io/cindyjs-apps/iornament/index.html
- Δείτε το μάθημα Mathigon για τη συμμετρία και τους μετασχηματισμούς: https://mathigon.org/course/transformations/introduction

Γέφυρες του Königsberg

Ένας από τους πρώτους μαθηματικούς που ασχολήθηκε με τους γράφους και τα δίκτυα ήταν ο Leonhard Euler. Τον ενθουσίασε ένα παλιό πρόβλημα που αφορούσε την πόλη Königsberg κοντά στη Βαλτική Θάλασσα (σήμερα Kaliningrad, Ρωσία). Στην περίπτωση του Königsberg φαίνεται ότι είναι αδύνατο να βρεθεί μια έγκυρη διαδρομή μέσω όλων των γεφυρών που διασχίζονται ακριβώς μία φορά.
Το πρόβλημα είναι στενά συνδεδεμένο με τη σχεδίαση ενός σχήματος (γραφήματος) χωρίς να σηκώνουμε το στυλό και χωρίς να διαγράψουμε την ίδια γραμμή πάνω από μία φορά. Καθένας από τους δεδομένους χάρτες πόλεων μπορεί να μετατραπεί σε γράφους με ακμές και κορυφές: Κάθε νησί ή περιοχή γης αναπαρίσταται από μια κορυφή και κάθε γέφυρα που συνδέει δύο περιοχές αναπαρίσταται από μια αντίστοιχη ακμή. Μόνο οι

συνδέσεις έχουν σημασία, το γράφημα μπορεί διαφορετικά να παραμορφωθεί με οποιονδήποτε τρόπο, οι γραμμές δεν χρειάζεται να είναι ευθείες.

Άλλες επιλογές:

Βάλτε τα παιδιά να σκεφτούν μερικές διαφορετικές γραφικές παραστάσεις και στη συνέχεια προσπαθήστε να βρείτε ποιες μπορούν να σχεδιαστούν με μία μόνο, συνεχή γραφή. Βοηθάει να βρείτε τον βαθμό κάθε κορυφής ενός γραφήματος (αριθμός ακμών, που συναντώνται σε αυτή την κορυφή). Μέσω συζήτησης/καταιγισμού ιδεών η ομάδα μπορεί να καταλήξει σε κανόνες που πρέπει να ικανοποιούνται για ένα γράφημα, ώστε να μπορεί να σχεδιαστεί όπως περιγράφεται παραπάνω. Για παράδειγμα: Το γράφημα πρέπει να είναι συνδεδεμένο. Μόνο δύο κορυφές μπορούν να έχουν περιττό βαθμό. Εάν υπάρχουν κορυφές με περιττό βαθμό, το μονοπάτι πρέπει να ξεκινά από τη μία από αυτές και να καταλήγει στην άλλη.
Ένα μονοπάτι που επισκέπτεται κάθε ακμή ενός γραφήματος ακριβώς μία φορά (μια κορυφή μπορεί να επισκεφθεί πολλές φορές) ονομάζεται "μονοπάτι του Euler". Εάν το μονοπάτι αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή, ονομάζεται "Κύκλος του Euler". Το θεώρημα του Euler δηλώνει: "Ένα συνδεδεμένο γράφημα έχει έναν κύκλο Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή έχει ζυγό βαθμό".
Αποδείχθηκε το 1873 από τον Carl Hierholzer.
Δοκιμάστε την ηλεκτρονική έκδοση εδώ:
https://mathigon.org/course/graph-theory/bridges.

Διπλώστε και κόψτε:

Το θεώρημα είναι ότι κάθε μοτίβο (επίπεδο γράφημα) από ευθύγραμμες τομές μπορεί να γίνει με αναδίπλωση και μία πλήρη ευθύγραμμη τομή. Έτσι είναι δυνατόν να γίνουν μεμονωμένα πολύγωνα (ενδεχομένως μη κυρτά), πολλαπλά διαχωρισμένα πολύγωνα, φωλιασμένα πολύγωνα, παρακείμενα πολύγωνα, ακόμη και κυμαινόμενα ευθύγραμμα τμήματα.
Βρείτε περισσότερες πληροφορίες εδώ: http://erikdemaine.org/foldcut/

Συντελεστές και άδεια χρήσης:

Η δραστηριότητα Χρωματικοί Χάρτες βασίζεται σε μια δραστηριότητα του Rod Pierce. Οι εικόνες στο πρότυπο χρησιμοποιούνται με την άδειά του. Την αρχική δραστηριότητα μπορείτε να τη βρείτε στον ιστότοπο Math is Fun www.mathsisfun.com.

Τα πρότυπα Οκτάεδρο ψαρι και Ψηφιδωτά δημιουργήθηκαν από τον Robert Fathauer και χρησιμοποιούνται με την άδειά του.

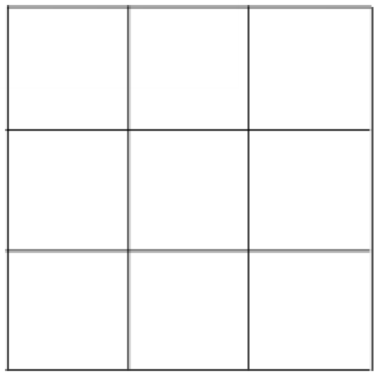
Η δραστηριότητα Γέφυρες του Königsberg βασίζεται σε ένα μάθημα από το Mathigon

www.mathigon.org. Οι εικόνες των χαρτών χρησιμοποιούνται με την άδεια του Philipp Legner.

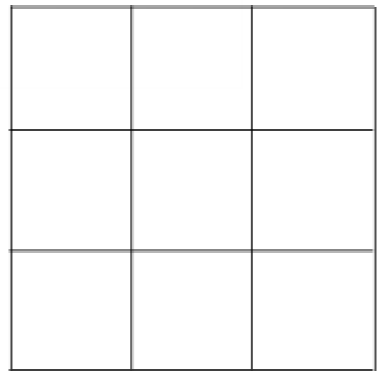
Η δραστηριότητα Fold-and-Cut βασίζεται στην περιγραφή του Eric Demaine που παρατίθεται εδώ: http://erikdemaine.org/foldcut/ Τα πρότυπα για αυτή τη δραστηριότητα δημιουργήθηκαν από την Christiane Rousseau.

Πρότυπα για χρωματιστούς χάρτες (σελίδα 1 από 3)

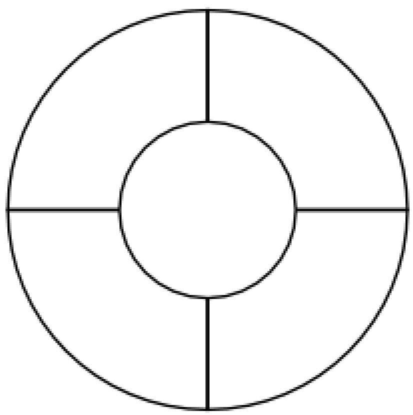
Δοκιμάστε διαφορετικούς χρωματισμούς για την ίδια φιγούρα ή χρωματίστε μόνο ένα από αυτά:



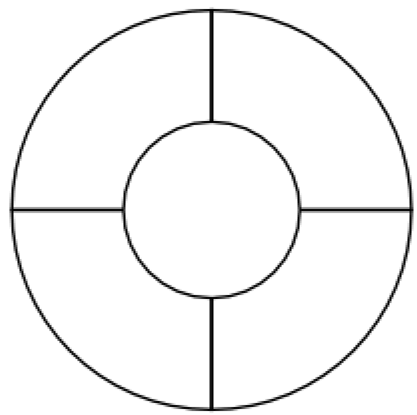
Αριθμός χρωμάτων: ____



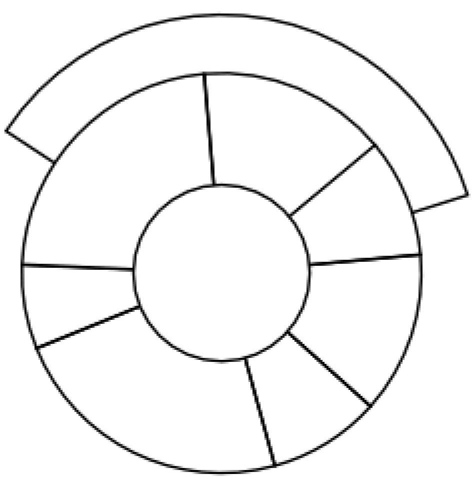
Αριθμός χρωμάτων: ____



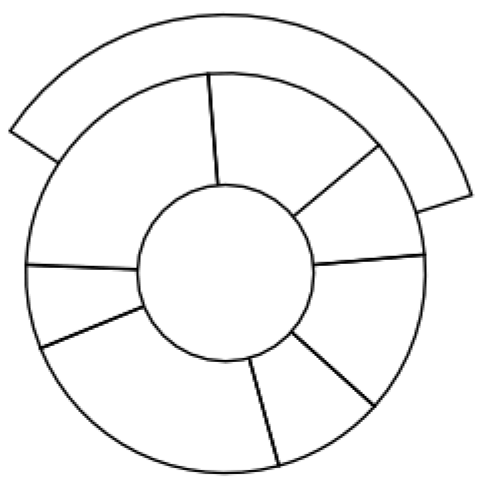
Αριθμός χρωμάτων: ____



Αριθμός χρωμάτων: ____



Αριθμός χρωμάτων: ____

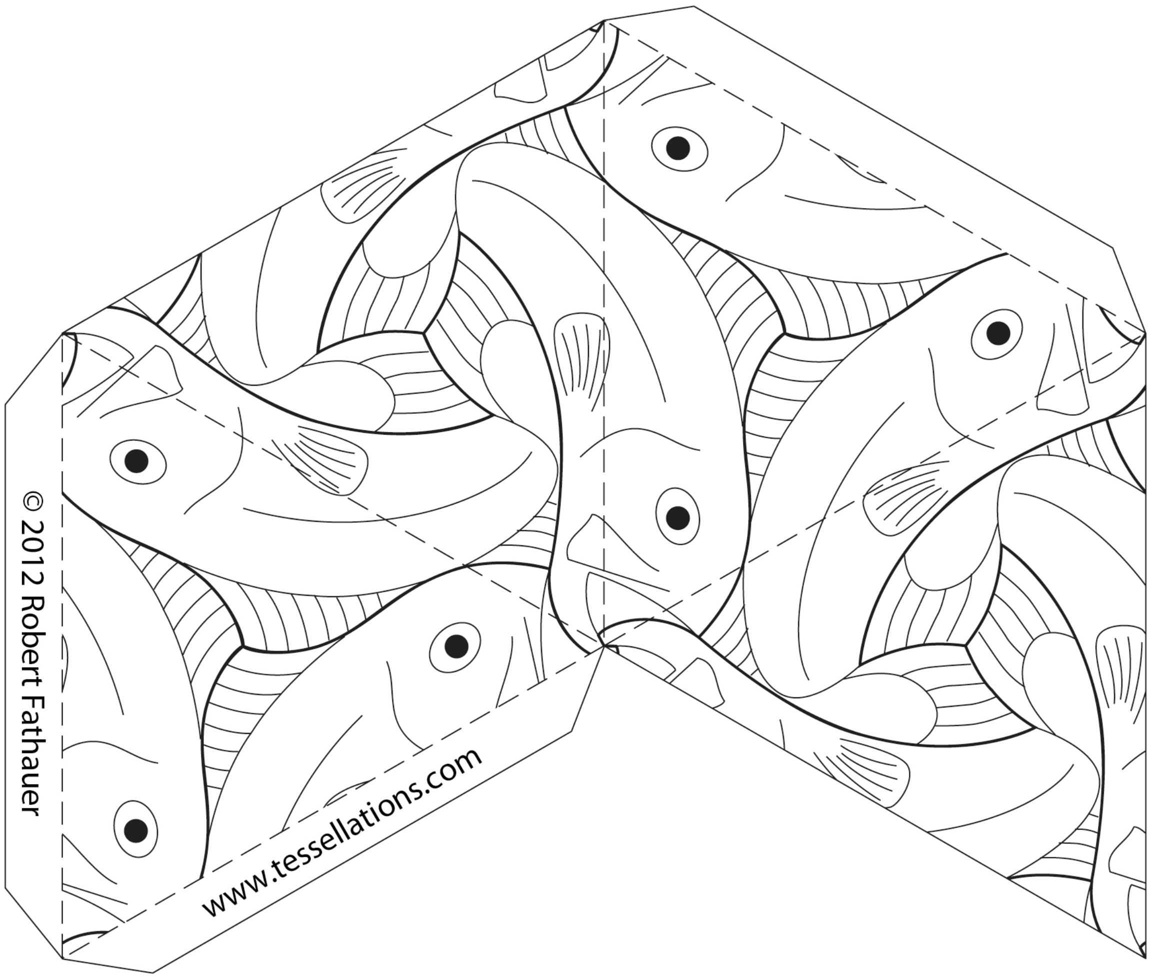


Αριθμός χρωμάτων: ____

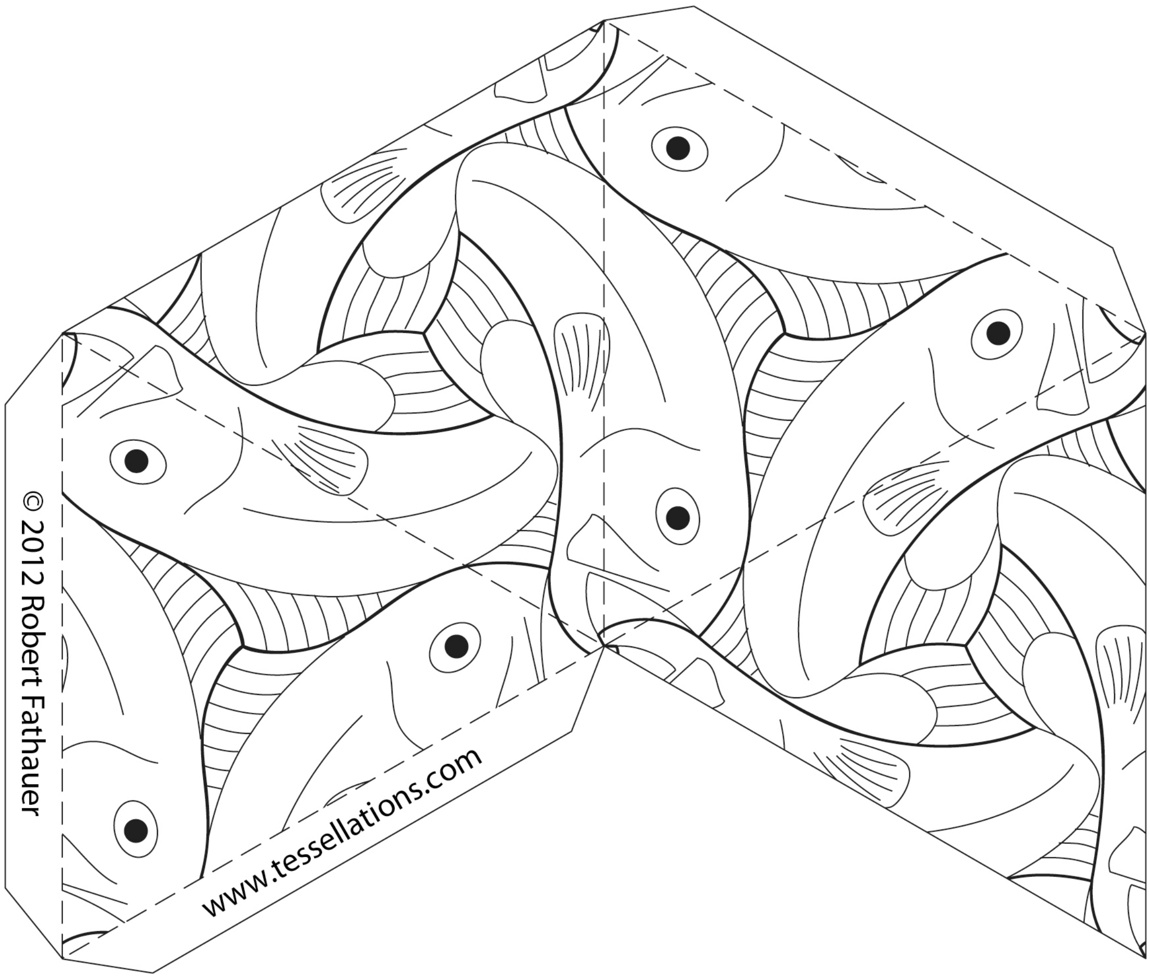
Πρότυπα για χρωματιστούς χάρτες (σελίδα 2 από 3)

Πρότυπα για χρωματιστούς χάρτες (σελίδα 3 από 3)

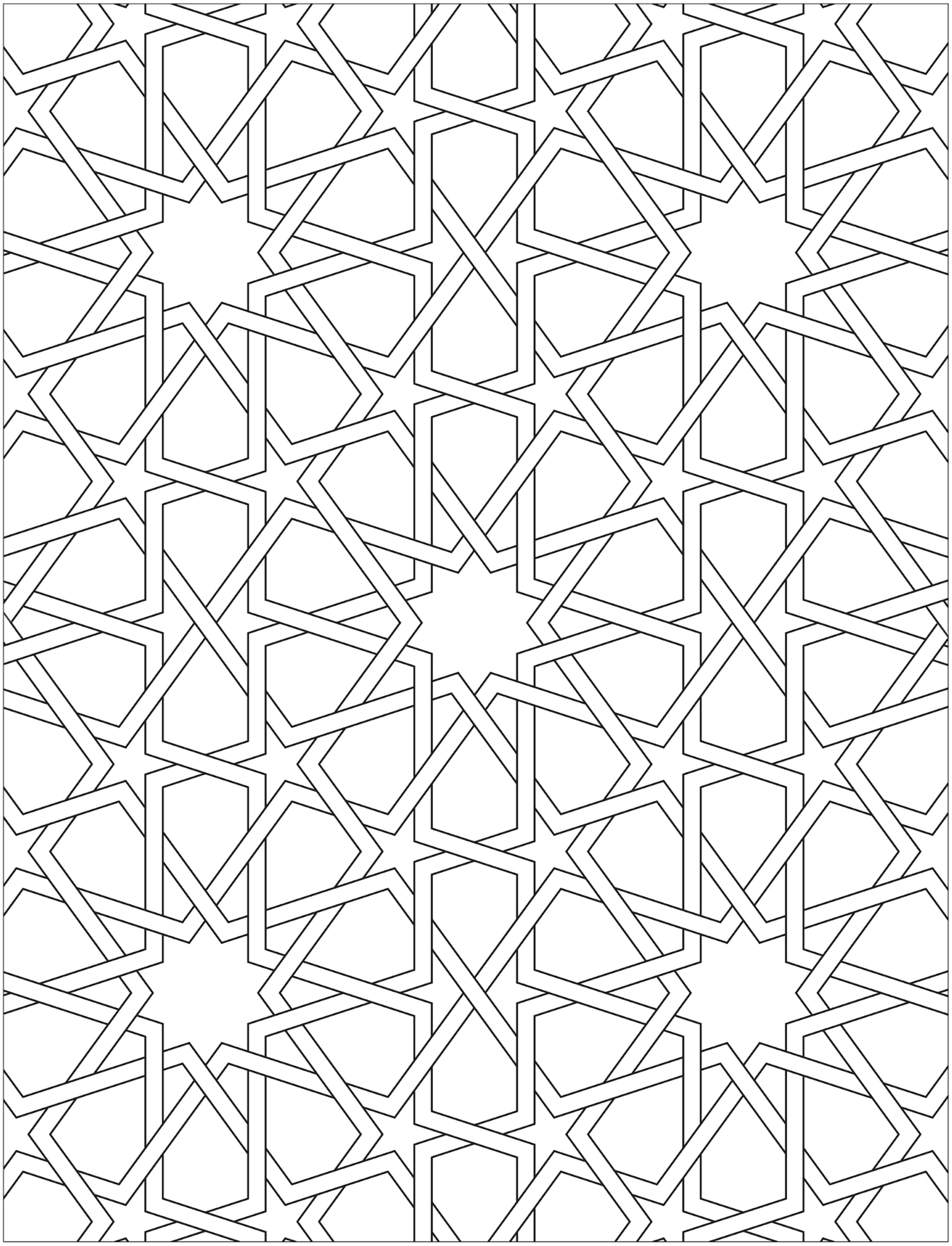
Πρότυπα για το Οκτάεδρο Ψάρι (σελίδα 1 από 2)



Πρότυπα για το Οκτάεδρο Ψάρι (σελίδα 2 από 2)

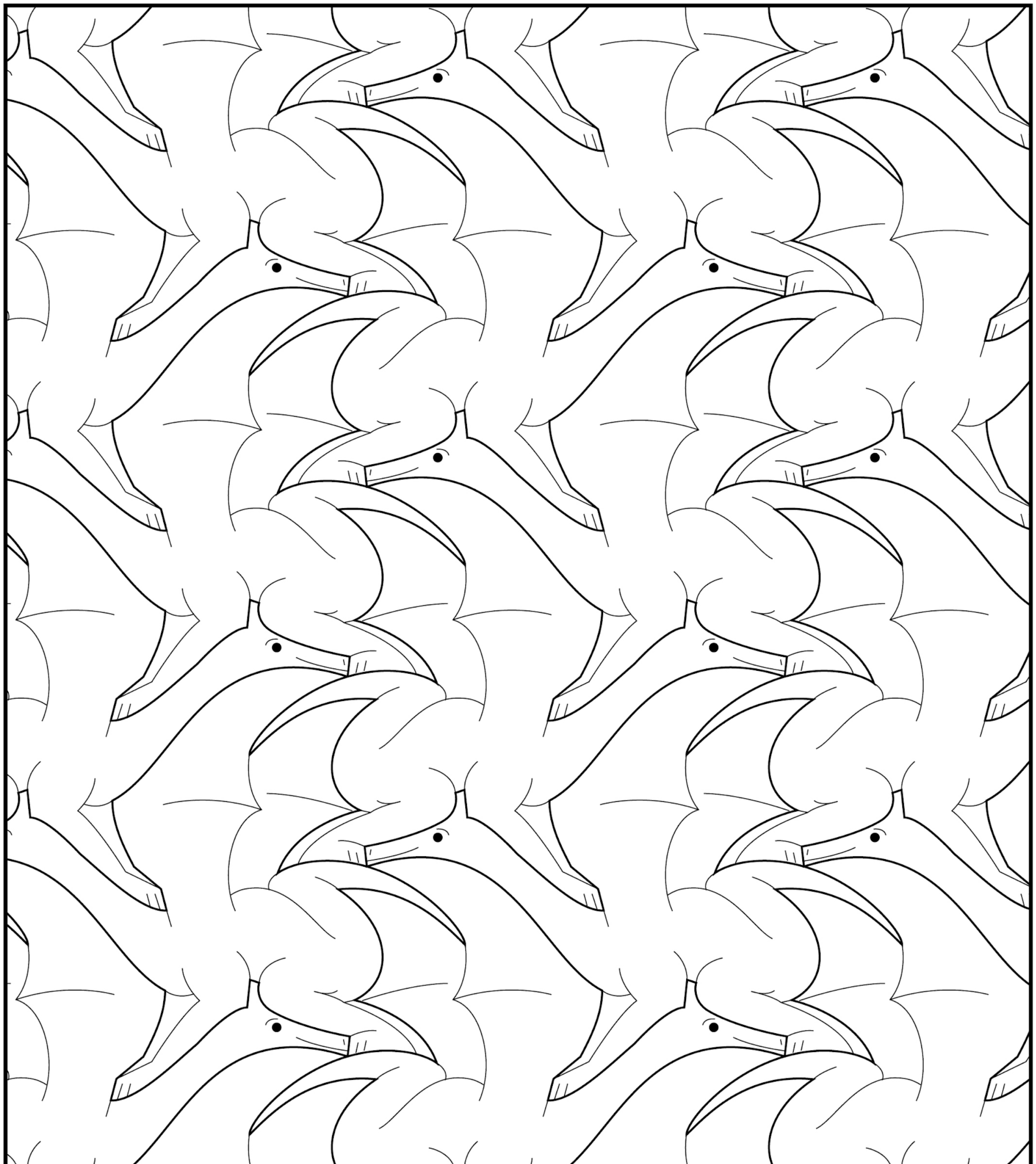


Πρότυπα για ψηφιδωτά (σελίδα 1 από 2)



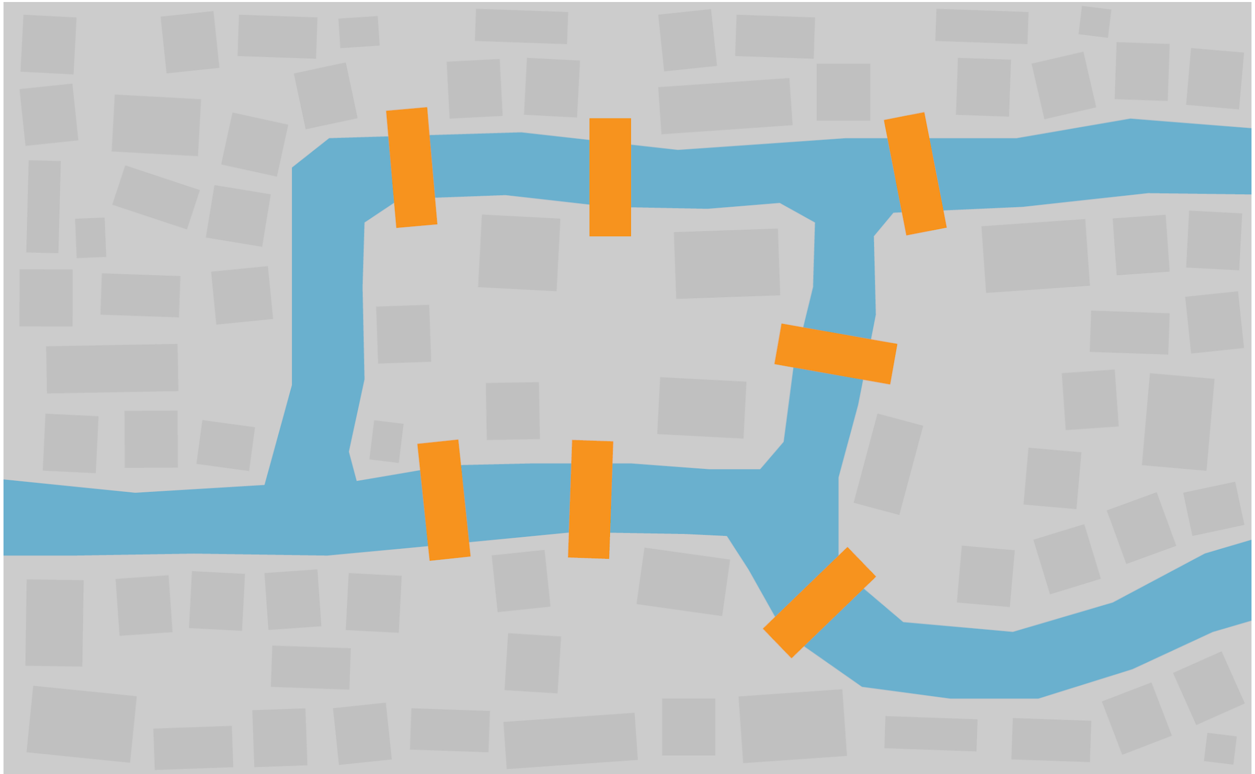
www.tessellations.com

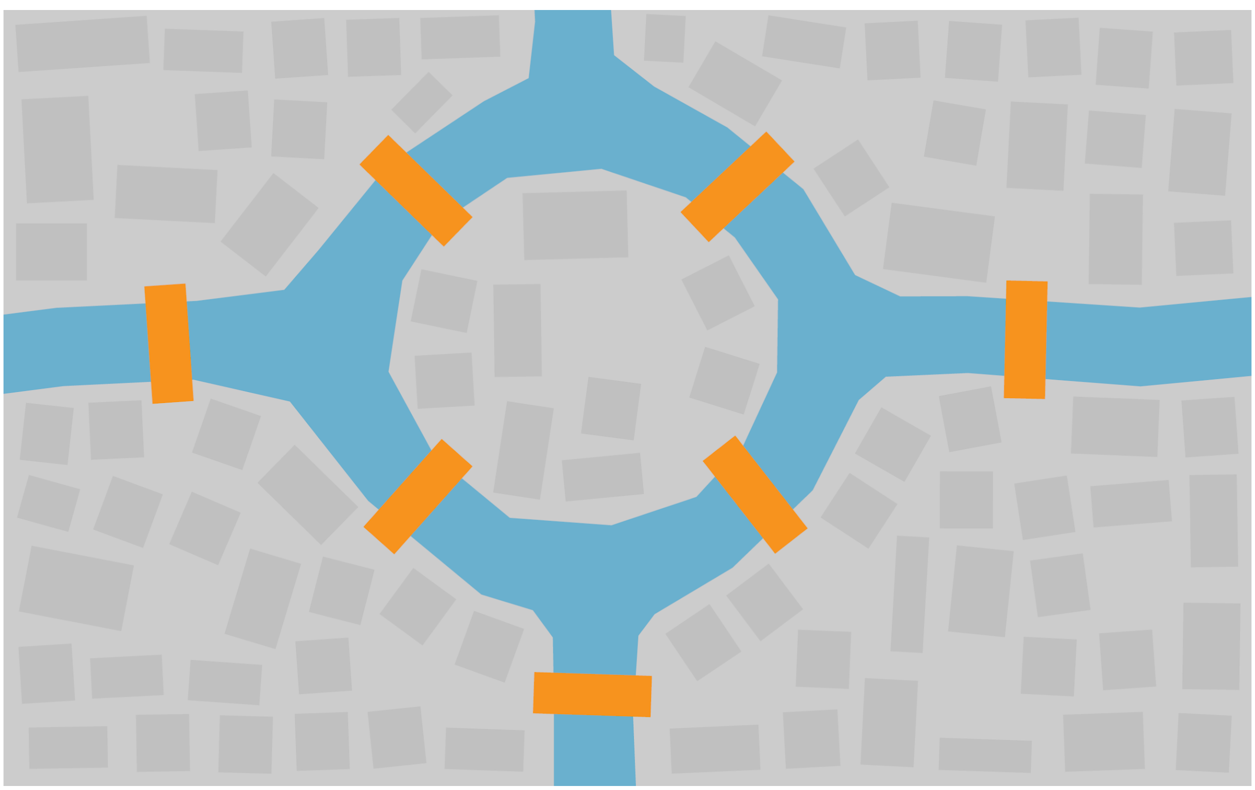
Πρότυπα για ψηφιδωτά (σελίδα 2 από 2)



www.tessellations.com “Dragons”

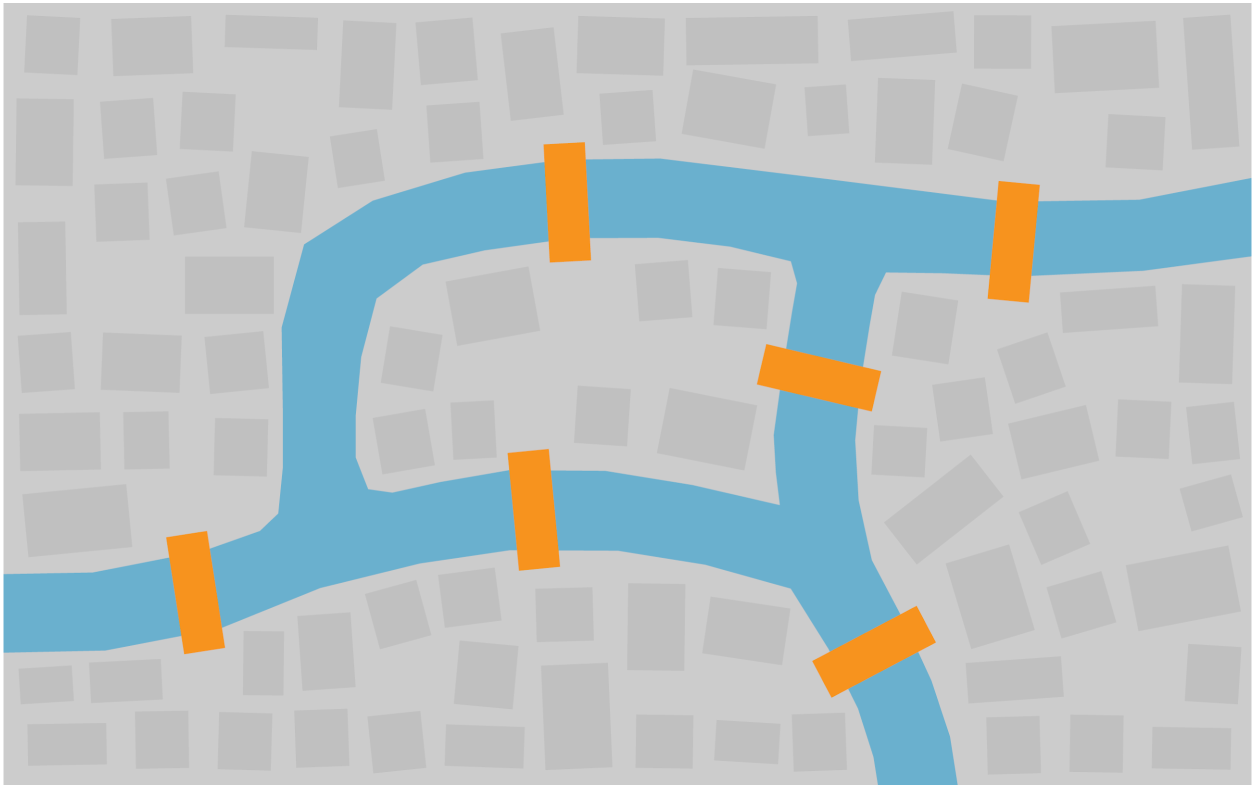
Πρότυπα για τις γέφυρες του Königsberg (σελίδα 1 από 2)

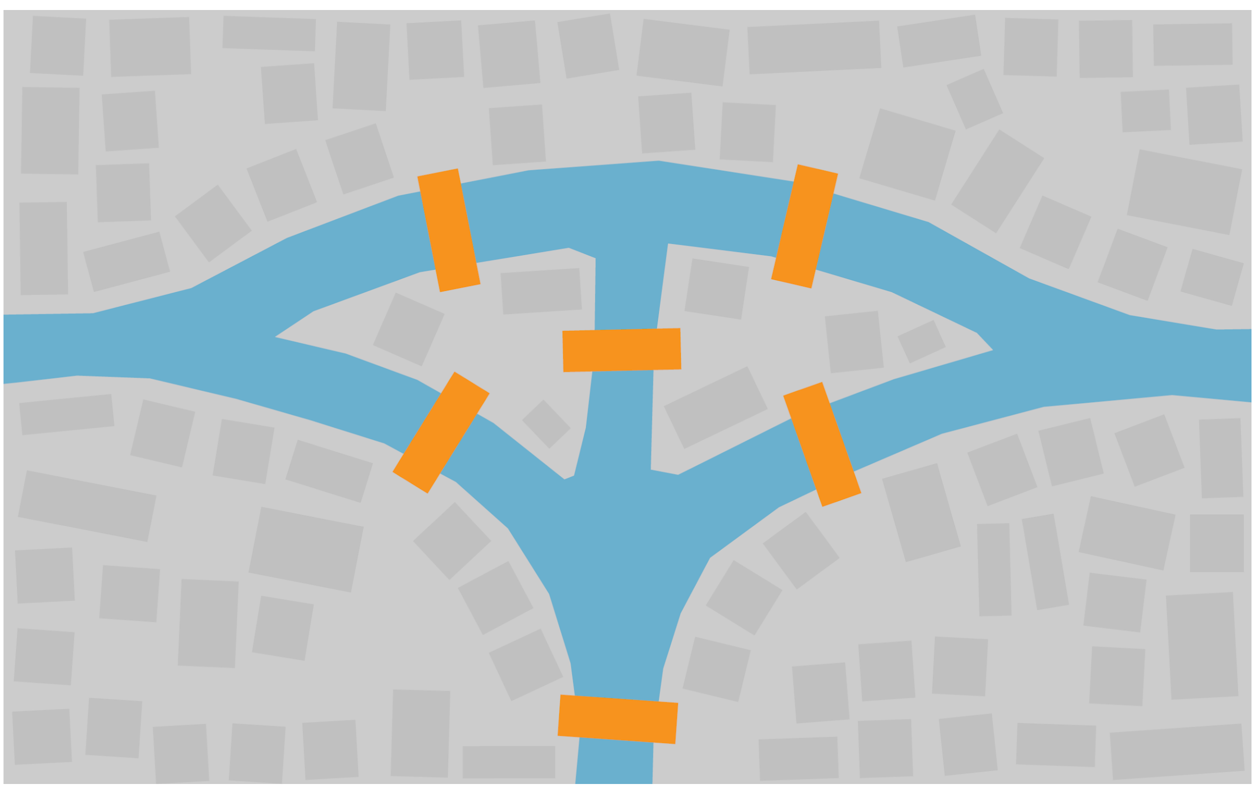




www.mathigon.org

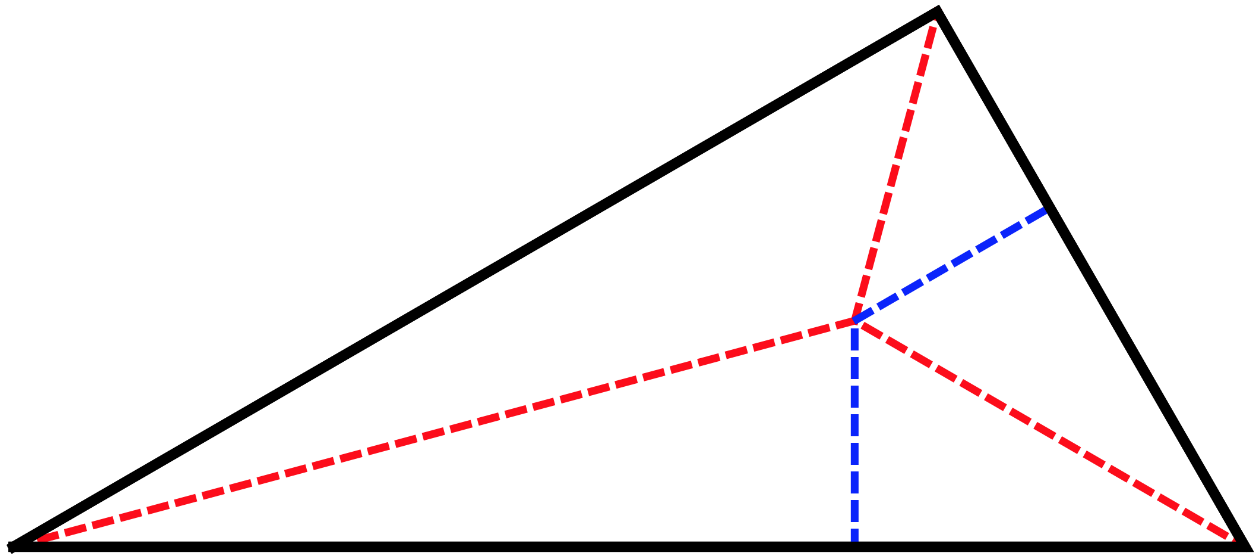
Πρότυπα για τις γέφυρες του Königsberg (σελίδα 2 από 2)

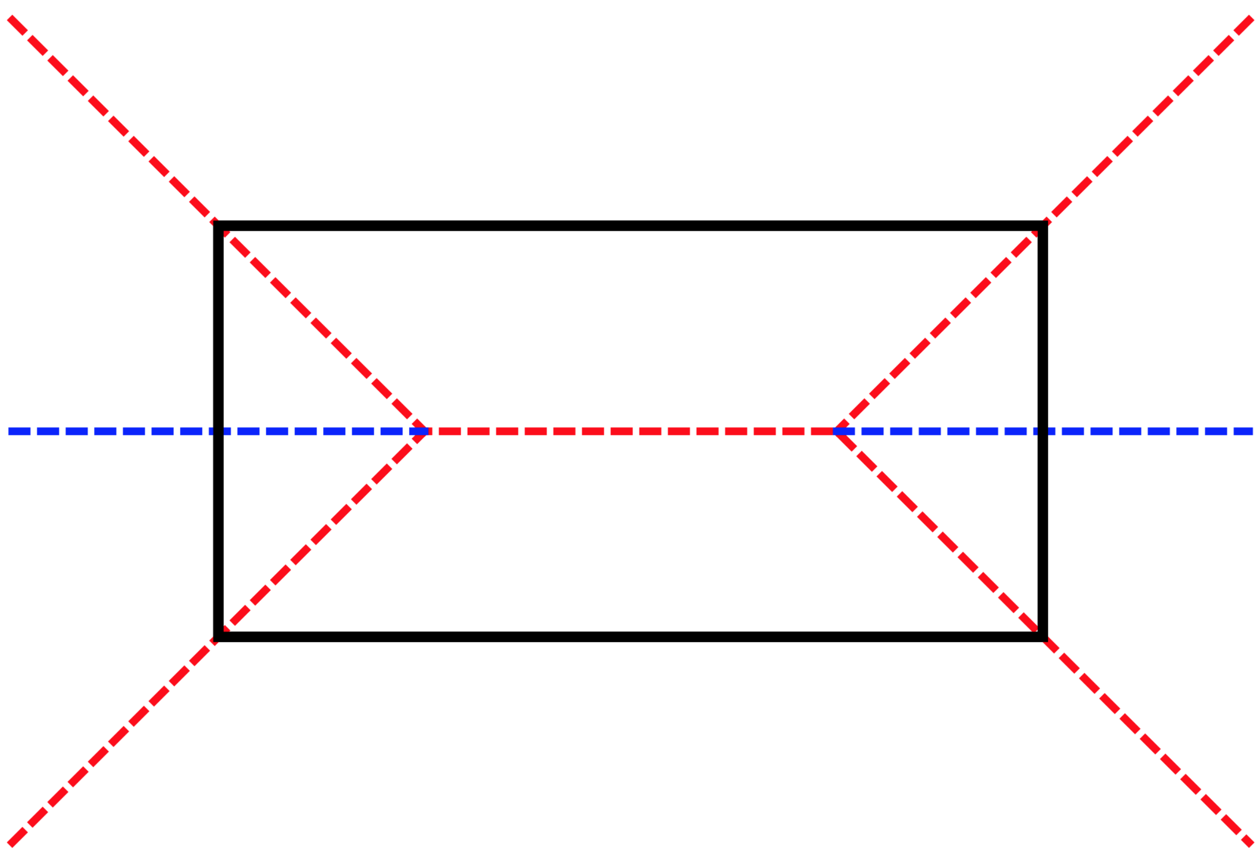




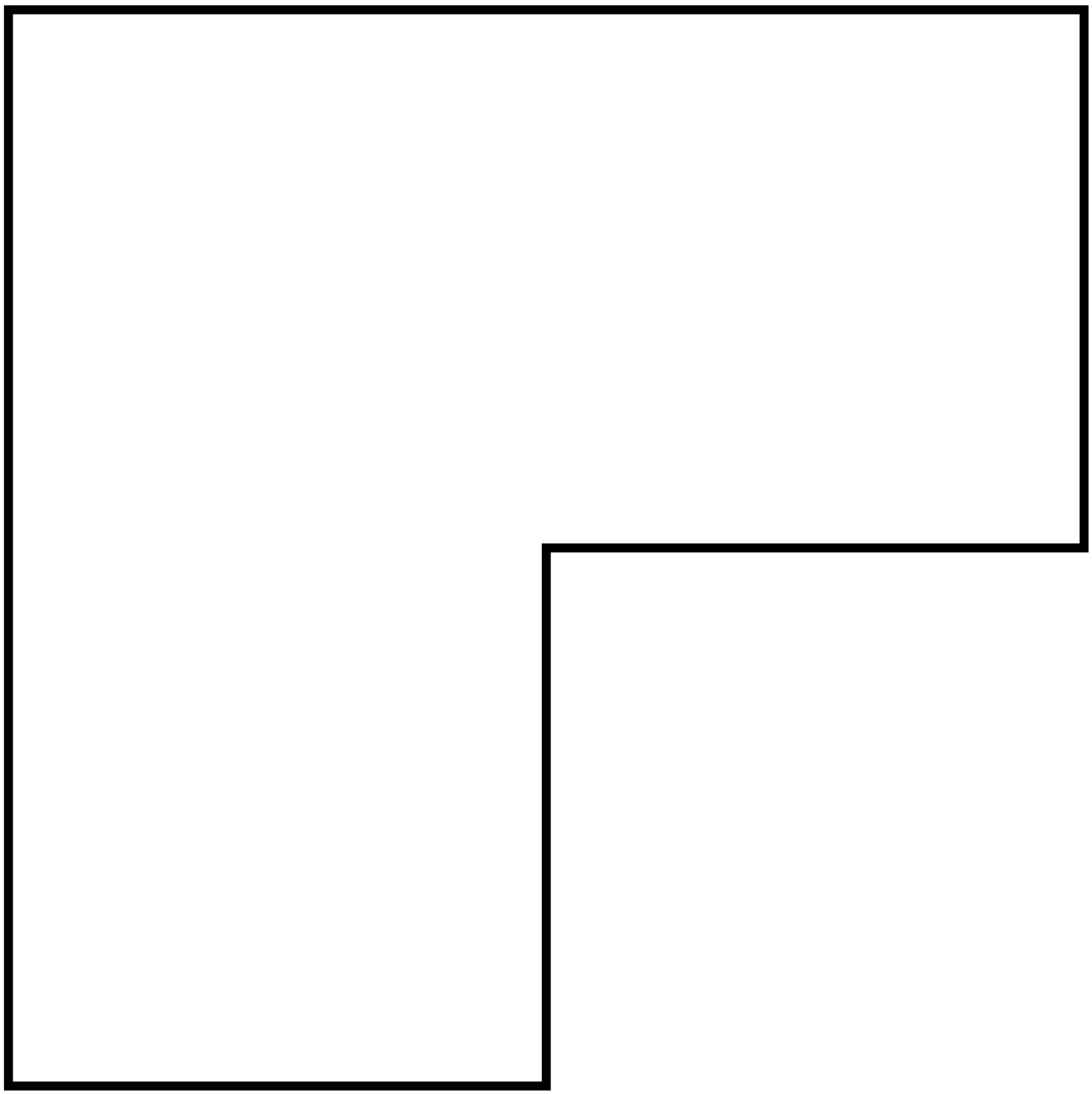
www.mathigon.org

Πρότυπα για Διπλώστε και Κόψτε (σελίδα 1 από 5)

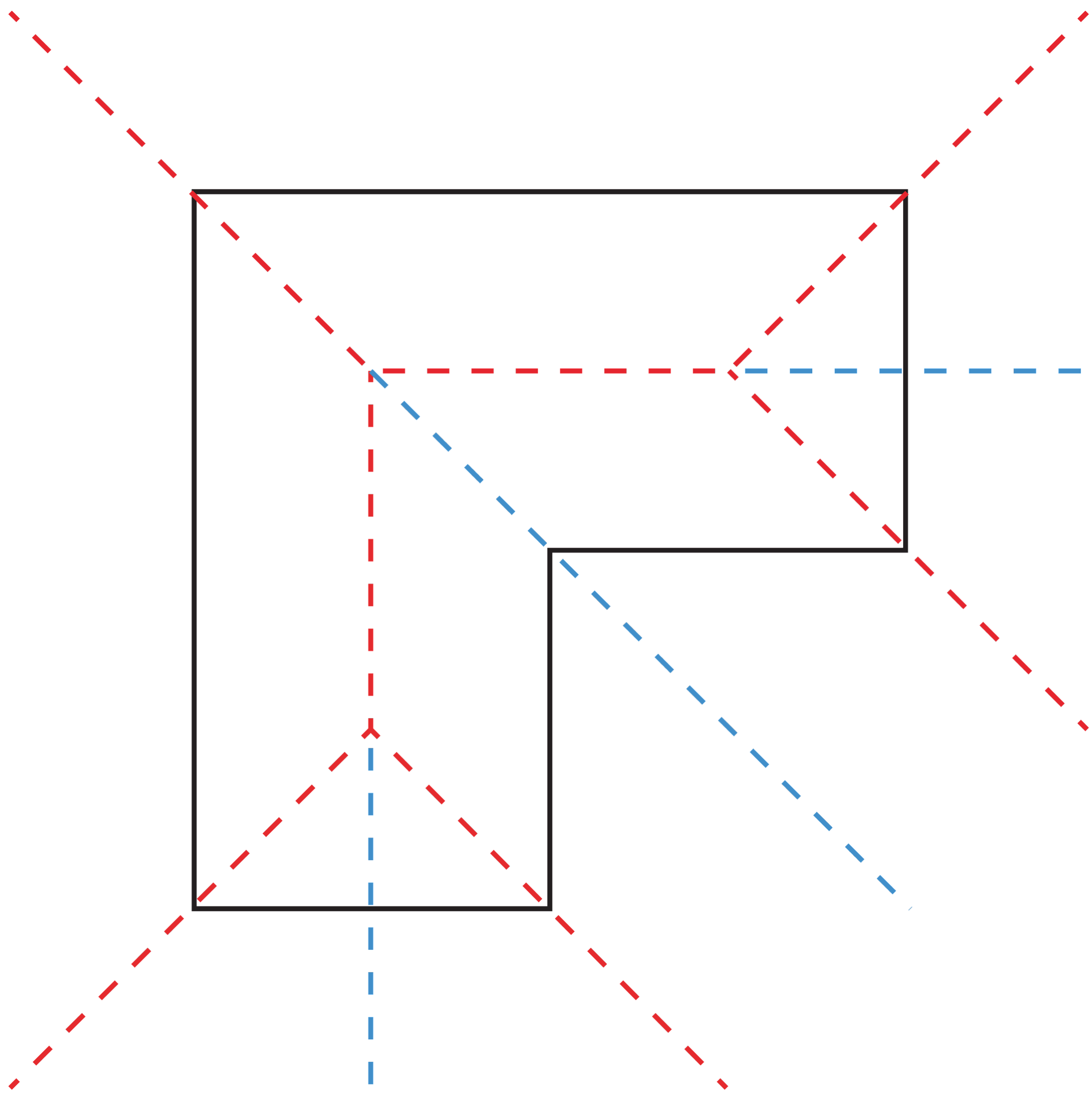




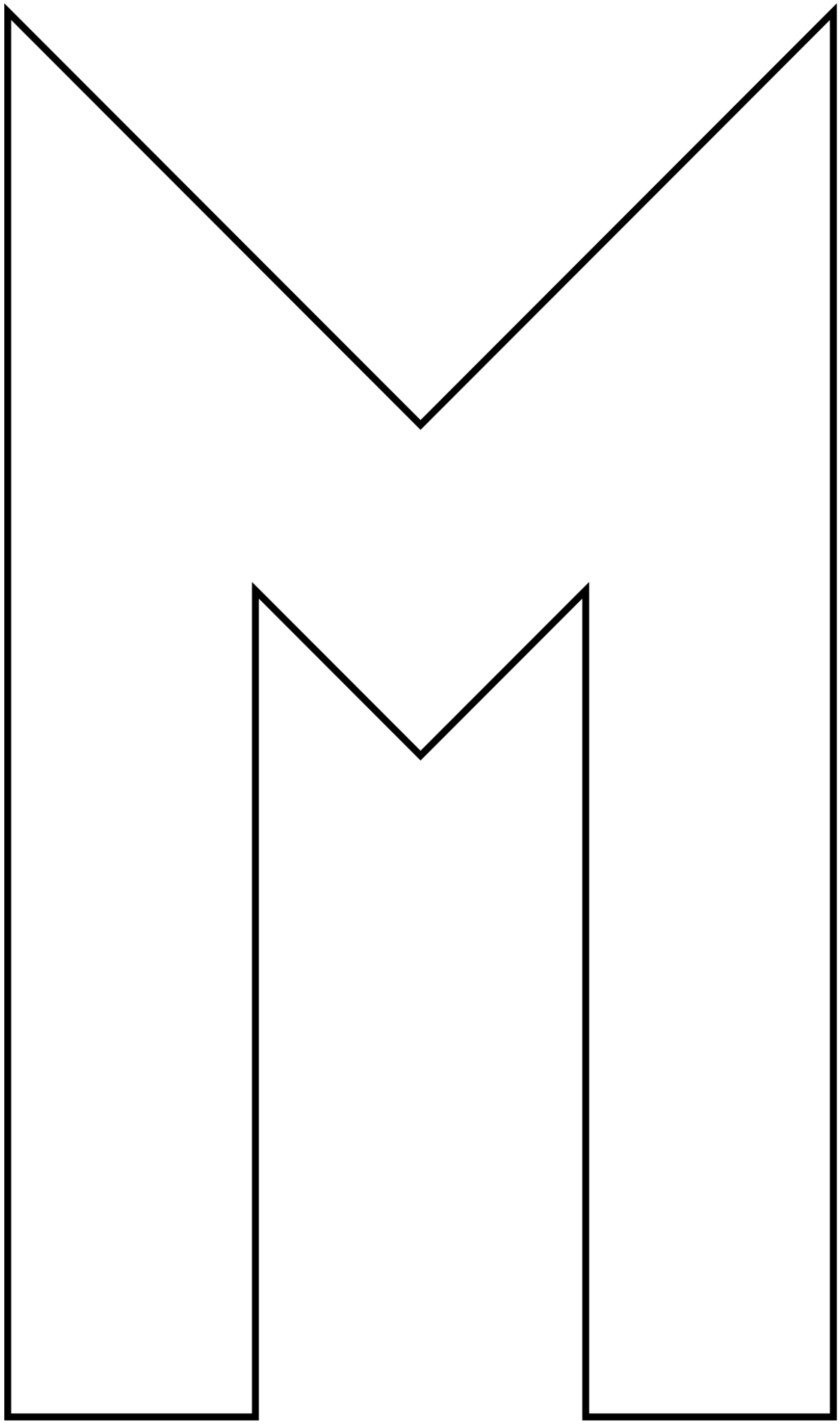
Πρότυπα για Διπλώστε και Κόψτε (σελίδα 2 από 5)



Πρότυπα για Διπλώστε και Κόψτε (σελίδα 3 από 5)



Πρότυπα για Διπλώστε και Κόψτε (σελίδα 4 από 5)



Πρότυπα για Διπλώστε και Κόψτε (σελίδα 5 από 5)