

## Partage équitable

### Participants :

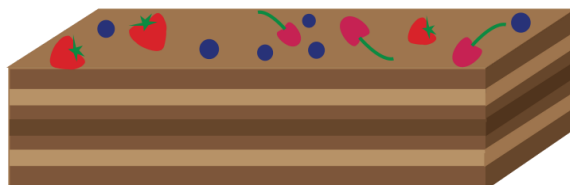
Age: 12 ans et plus. Groupes de 4-5 personnes.

### Problématique :

Nous explorons différentes méthodes mathématiques pour répartir un gâteau entre plusieurs personnes, afin que chacune ait une part équitable. Dans la dernière activité, nous partageons des corvées au lieu de partager un gâteau. Bien que chacun souhaite avoir le moins de corvées possible (au lieu de la plus grande part du gâteau), nous pouvons les répartir équitablement avec une méthode similaire.

### Préparatifs

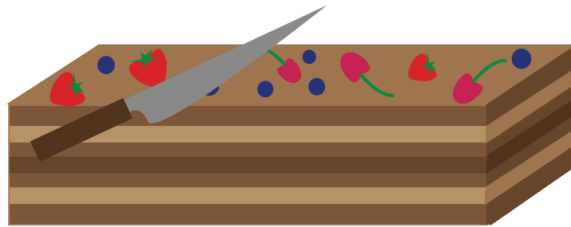
Préparez des couteaux en carton, un sabre en carton et des gâteaux en carton pour chaque groupe ou, mieux encore, demandez aux groupes de les fabriquer. Les gâteaux ne doivent pas être homogènes ; les participants peuvent donc en préférer une partie.



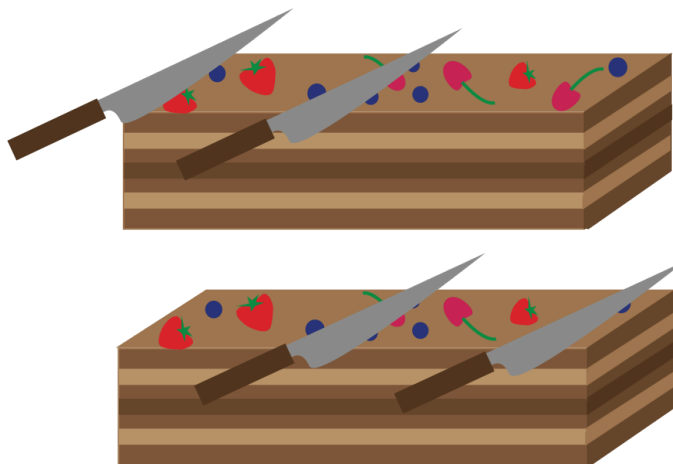
## Activité 1 - Un partage sans jalousie d'un gâteau entre deux personnes

Le but est de partager un gâteau entre deux personnes afin qu'aucune n'envie la part reçue par l'autre.

- Demandez au groupe si quelqu'un peut penser à une stratégie pour y parvenir.
- Proposez la stratégie : "Je coupe, tu choisis" et essayez-la plusieurs fois avec deux participants. Supposons que Maryam coupe et que Caucher choisisse. Comment Maryam devrait-elle couper, pour ne pas envier Caucher ? Une telle division est appelée "sans jalousie".



- Discuter : Vaut-il mieux être la personne qui coupe ou celle qui choisit ?
- Puisqu'il vaut mieux choisir, Maryam propose d'affiner la stratégie précédente. Elle dit à Caucher : *"Je vais déplacer continûment de gauche à droite deux couteaux sur le gâteau. Quand tu me diras d'arrêter, je m'arrêterai et je couperai le gâteau en suivant la position des deux couteaux. Ensuite, je choisirai soit le morceau entre les deux couteaux, soit les deux embouts, et tu auras l'autre part"*.
- Discutez : Comment Maryam doit-elle tenir ses couteaux ? Quand Caucher doit-il dire "stop" ?



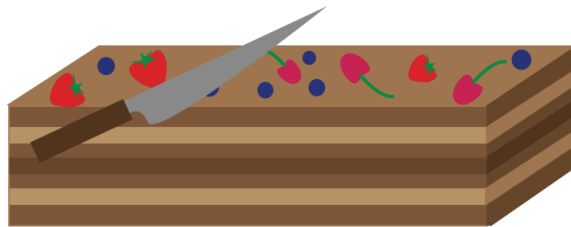
- Si le groupe de participants ne trouve pas la stratégie, expliquez-la : Maryam devrait tenir ses deux couteaux pour être également heureuse avec n'importe laquelle des deux parts. Caucher devrait dire "Stop !" lorsqu'il est également satisfait des deux parts.

- Mais pourquoi sommes-nous sûrs qu'il y aura au moins un moment où Caucher sera aussi heureux avec n'importe laquelle des deux parts ? Si les participants ne trouvent pas d'explication, proposez et discutez celle qui suit.
- Voici l'explication de la raison pour laquelle il y a au moins un moment où Caucher sera également satisfait des deux parts. Au début, un couteau se trouve sur le bord gauche du gâteau, et l'autre divise le gâteau en deux parts. Supposons que Caucher préfère le morceau de droite (qui est la part "en dehors des couteaux"). À l'autre bout, lorsqu'un couteau se trouve sur le bord droit, le même morceau préféré se trouve maintenant entre les couteaux. De plus, il y a eu un mouvement continu des couteaux dans lequel, au début, Caucher préférerait la part à l'extérieur des couteaux, tandis qu'à la fin, il préférerait la part entre les couteaux. Ainsi, entre les deux, on est passé par une position où les deux parts ont égale valeur pour lui (c'est une application du théorème de la valeur intermédiaire).
- Nous appelons une telle répartition "équitable" parce que, autant pour Maryam que pour Caucher, les deux parts ont égale valeur pour eux. Une division équitable est sans jalousie, mais l'inverse peut ne pas être le cas.

## Activité 2 - Une répartition proportionnelle du gâteau entre $n$ personnes

Ici l'objectif est que chaque participant reçoive une part qu'il estime à au moins  $1/n$  du gâteau complet.

- Demandez si quelqu'un veut proposer une méthode.
- Voici une méthode : Le couteau est maintenant dans la main d'un médiateur, qui le déplace de gauche à droite. Dès qu'un participant dit "stop !", le médiateur s'arrête et coupe le gâteau en suivant la position du couteau. Le participant qui a dit "Stop !" reçoit le morceau à gauche du couteau.
- Ensuite, le médiateur recommence à déplacer le couteau sur le morceau de gâteau restant jusqu'à ce qu'un deuxième participant dise "Stop !". Ce participant reçoit le nouveau morceau à gauche du couteau, et ainsi de suite. Le dernier participant (qui n'a jamais dit "Stop !") reçoit le dernier morceau restant.

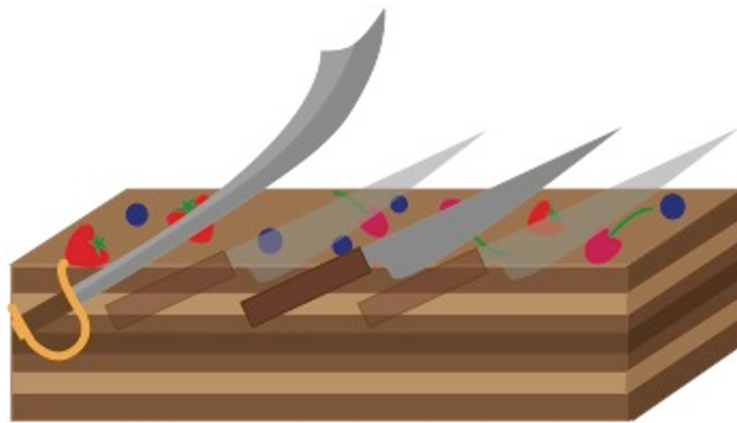


- Essayez cette méthode plusieurs fois avec l'ensemble du groupe : le médiateur doit déplacer le couteau très, très, très lentement pour que les participants aient le temps de décider de leur stratégie. Certains participants ont-ils l'impression d'avoir reçu un morceau qui est inférieur à leur part d' $1/n$  de l'ensemble du gâteau ? Si oui, comment peuvent-ils modifier leur stratégie ?
- Voici une stratégie de répartition proportionnelle : chaque participant dit "Stop !" dès qu'il constate que la valeur à gauche du couteau vaut pour lui au moins  $1/n$  de la valeur totale du gâteau. Expliquez pourquoi cette stratégie garantit que chaque participant recevra un morceau qu'il estime valoir au moins  $1/n$  de la valeur totale du gâteau.
- Notez que cette stratégie n'est pas sans jalousie. Pourquoi ne l'est-elle pas ?

### Activité 3 - Un partage du gâteau sans jalousie entre 3 personnes

L'objectif est maintenant de diviser le gâteau de manière à ce qu'aucun participant n'envie les morceaux de gâteau reçus par les deux autres.

- Demandez si quelqu'un veut proposer une stratégie.
- Voici une stratégie : Le médiateur tient un sabre et le déplace de gauche à droite. En même temps, chaque participant déplace un couteau sur le côté droit du sabre. Dès qu'un participant dit "Stop !", tout le monde arrête de bouger son couteau. Le gâteau est coupé en deux endroits : aux positions du sabre et du couteau du milieu. Le participant qui a dit "Stop !" reçoit le morceau à gauche du sabre. Parmi les deux participants restants, celui dont le couteau est le plus à droite reçoit le morceau de droite, et le participant restant reçoit le morceau du milieu.



- Essayez cette méthode à plusieurs reprises avec différents membres jouant le rôle de médiateur. Le médiateur doit déplacer le sabre très, très lentement afin que les participants aient le temps de décider de leur stratégie. Certains participants envient-ils la part d'un autre participant ? Quelqu'un souhaite-t-il proposer une stratégie pour la façon dont chaque participant doit déplacer son couteau ?
- Voici une stratégie pour une division sans jalousie :
  - Chaque participant tient son couteau de façon à ce que les deux parts qu'il délimite, à droite du sabre, aient la même valeur pour lui.
  - Appelons "participant 1" celui dont le couteau est le plus à gauche, "participant 2" celui dont le couteau est au milieu, et "participant 3" celui dont le couteau est le plus à droite.
  - Le participant 1 dit "Stop !" lorsqu'il constate que le morceau de gauche a la même valeur pour lui que le morceau du milieu.
  - Le participant 2 dit "Stop !" lorsque les trois parts ont la même valeur pour lui.
  - Le participant 3 dit "Stop !" lorsqu'il constate que la valeur de la part de gauche est la même que celle de la part de droite.

- Discutez des raisons pour lesquelles cette stratégie est sans jalousie. Prenez le point de vue de chaque participant et expliquez pourquoi aucun participant n'envie la part des autres.

## Activité 4 - Une répartition des corvées sans jalousie entre 3 personnes

Si nous mettons les corvées dans une grille, nous pouvons les répartir comme un gâteau. Dans ce cas, chaque participant voudra obtenir une portion aussi petite que possible. Notre objectif est alors qu'aucun participant n'envie la part de corvées des autres.

- Ce problème est analogue à celui de l'activité 3, et nous pouvons en tirer une stratégie. Quelqu'un a-t-il une idée ?
- Voici une stratégie. Le médiateur tient maintenant un sabre et le déplace de gauche à droite. En même temps, chaque personne déplace un couteau à droite du sabre. Dès qu'un participant dit "Stop !", tout le monde arrête de bouger son couteau. La grille est coupée en deux endroits : aux positions du sabre et du couteau du milieu. Le participant qui a dit "Stop !" reçoit la portion la plus à droite. Parmi les deux autres participants, celui dont le couteau est le plus à droite reçoit la portion du milieu, et le dernier reçoit la portion de gauche.

Nettoyer les vitres	Faire le lavage	Faire la cuisine	Repasser
Laver les planchers	Faire la vaisselle	Sortir les ordures	Nourrir le chat
Passer l'aspirateur	Arroser les plantes	Mettre le couvert	Faire l'épicerie
Nettoyer la salle de bains	Tondre le gazon	Balayer	Recycler

- Essayez cette méthode à plusieurs reprises avec différents membres jouant le rôle de médiateur. Le médiateur doit déplacer le sabre très lentement afin que les participants aient le temps de décider de leur stratégie. Certains participants envient-ils la part d'un autre participant

? Quelqu'un souhaite-t-il proposer une stratégie pour la façon dont chaque participant doit déplacer son couteau ?

- Voici une stratégie pour une répartition des corvées sans jalousie :
  - Tous les participants tiennent leur couteau de manière à ce que la portion la plus à gauche ait la même valeur, pour eux, que la portion située entre le sabre et leur propre couteau.
  - Appelons "participant 1" celui dont le couteau est le plus à gauche, "participant 2" celui dont le couteau est au milieu, et "participant 3" celui dont le couteau est le plus à droite.
  - Le participant 1 dit "Stop !" dès qu'il constate que la valeur de la portion de gauche a la même valeur pour lui que celle de la portion de droite.
  - Le participant 2 dit "Stop !" lorsque les trois portions ont la même valeur pour lui.
  - Le participant 3 dit "Stop !" dès qu'il constate que la valeur de la portion du milieu est, pour lui, la même que celle de la portion de droite.
- Discutez des raisons pour lesquelles cette stratégie est sans jalousie. Prenez le point de vue de chaque participant et expliquez pourquoi aucun participant n'envie la part des autres.

### **Créez et partagez !**

Partagez des photos et des vidéos de l'activité ou des stratégies proposées par le groupe, en utilisant le hashtag #idm314.

### **Approfondissez le sujet avec quelques vidéos :**

- [See a different method to share a cake between three people, explained by Hannah Fry in a Numberphile video.](#)
- [Math Encounters - Fair Division: How to Cut Cakes \(and other things\) Fairly.](#) Un exposé sur la répartition équitable par le professeur Francis Su au musée MoMath.

© 2020 Christiane Rousseau

Ce travail est sous licence [Creative Commons Attribution 4.0 International License.](#)