

اليوم العالمي للرياضيات 14 مارس

تقسيم عادل

المشاركون

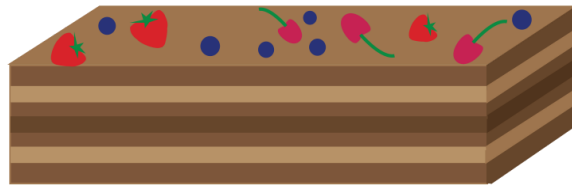
البالغون لـ 12 سنة وما فوق، مقسمون إلى مجموعات من 4 إلى 5 أشخاص

نظرة عامة

نستكشف هنا طرقاً رياضية مختلفة لتقسيم كعكة على مجموعة من الأشخاص، حتى يحصلوا على حصص متكافئة. في نشاطنا الأخير، سنقوم بتوزيع الأعمال المنزلية بدلاً من الكعك. بالرغم من أن الجميع يريد أقل قدر من الأعمال المنزلية (بدلاً من الجزء الأكبر) فإنه يمكننا تقسيمها بشكل عادل و بطريقة متماثلة.

التحضيرات

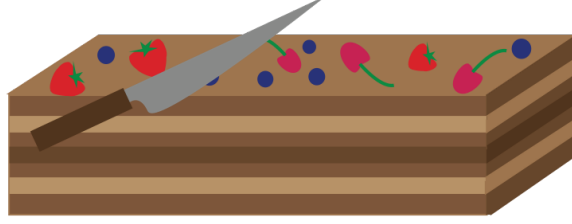
تحضّر سكاكين من الورق المقوى، سيف من الورق المقوى، وكعكة من الورق المقوى لكل مجموعة ولو أنه من المستحسن أن تحضّر لها المجموعة بنفسها. يجب أن تكون الكعكة غير متجانسة، وهذا سيكون دافعا للمشاركين من أجل اختيار بعض القطع.



نشاط 1 - طريقة خالية من الحسد لتقسيم كعكة على شخصين

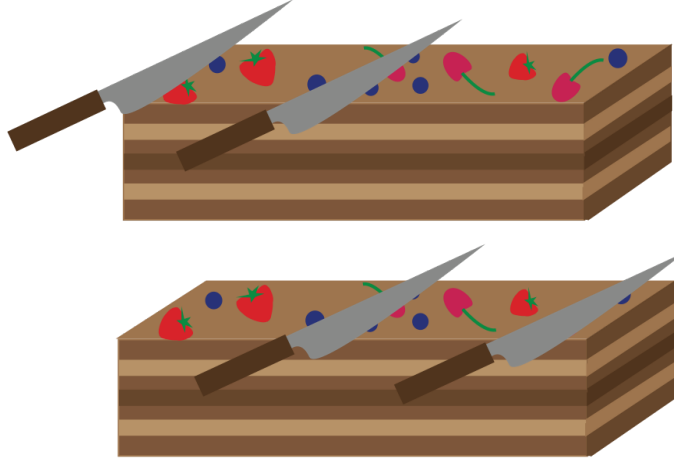
الهدف هو تقسيم كعكة ومشاركتها بين شخصين بحيث لا يحسد أي أحد منهما الآخر على القطعة التي تلقاها.

- اسأل المجموعة عما إذا كان بإمكان أي شخص التفكير في إستراتيجية لتحقيق ذلك.
- اقترح الإستراتيجية التالية: "أنا أقطع، أنت تختار" وجربها عدة مرات مع اثنين من المشاركين. لنفرض أن مريم تقطع و كوشر يختار. كيف تقطع مريم حتى لا تحسد كوشر؟ يطلق على هذا التقسيم بـ "الخالي من الحسد".



- ناقش: هل من الأفضل أن تكون أنت من يقطع أم من يختار؟
- نظرًا لأنه من الأفضل الاختيار، تقترح مريم تحسين الإستراتيجية السابقة. تقول لكوشر: "سأحرك سكينين فوق الكعكة. عندما تطلب مني التوقف، سأتوقف وأقطع الكعكة على طول وضعيتي السكينين. ثم سأختار حصتي، إما القطعة ما بين السكينين، أو القطعتين الطرفيتين، أما أنت فستحصل على الحصة المتبقية".

- ناقش: كيف تمسك مريم بسكينها؟ و متى يجب أن يقول لها كوشر "توقفي"؟



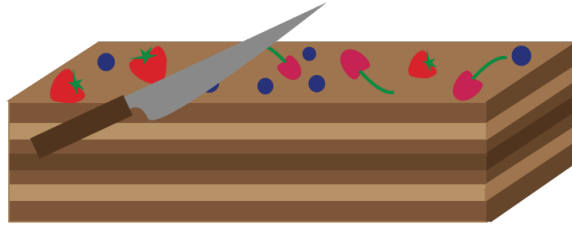
- إذا لم يتمكن مشاركو المجموعة من إيجاد الإستراتيجية، اشرحها لهم: يجب على مريم أن تمسك بسكينها حتى تصبح راضية و سعيدة دائمًا بأي من الحصتين. يجب أن يقول كوشر "توقفي!" عندما يصير مقتنعا و سعيدًا بأي من الحصتين بنفس القدر.
- لكن لماذا نحن على يقين من أن هناك لحظة واحدة على الأقل يكون فيها كوشر سعيدًا بأي من الحصتين بنفس القدر؟ إذا لم يجد المشاركون أي تفسير، اقترحوا وناقشوا الشرح أسفله.

- فيما يلي شرح لسبب وجود لحظة واحدة على الأقل يكون فيها كوشر سعيداً بأي من الحصتين بنفس القدر. في البداية، يكون أحد السكّنين في الحافة اليسرى من الكعكة، والآخر يقسم الكعكة إلى قطعتين. نترض أن كوشر يفضّل القطعة اليمنى (وهي قطعة "خارج السكّنين"). في الجهة الأخرى، عندما يكون أحد السكّنين على الحافة اليمنى، نفس القطعة المفضلة هي الآن "بين السكّنين". عندئذ، هناك حركة مستمرة للسكّنين حيث، في البداية فضل كوشر قطعة "خارج السكّنين" ، بينما في النهاية فضل قطعة "ما بين السكّنين". وبالتالي، فإنه اجتاز موضعاً ، ما بينهما، يحتمل فيه أن الحصتان متساويتان بالنسبة له (هذا تطبيق لنظرية القيمة المتوسطة).
- نحن نطلق على هذه القسمة بـ "العادلة" لأن كلا من مريم وكوشر يحصلان على حصة لها نفس القيمة بالنسبة لهما. القسمة العادلة هي قسمة خالية من الحسد ، لكن العكس قد لا يكون صحيحاً دائماً.

نشاط 2 – تقسيم متناسب لكعكة بين عدد ن من الأشخاص

الهدف هنا هو أن يحصل كل واحد من المشاركين على جزء يقدرونه على الأقل بـ $1/n$ من الكعكة.

- اسأل إن كان شخص يريد اقتراح طريقة ما.
- هناك طريقة واحدة: السكين في يد وسيط يحركها من اليسار إلى اليمين. بمجرد أن يقول أحد المشاركين "توقف!" يتوقف الوسيط ويقطع الكعكة على طول موضع السكين. المشارك الذي قال "توقف!" يتحصل على القطعة الموجودة يسار السكين.
- ثم يبدأ الوسيط مرة أخرى في تحريك السكين على قطعة الكعكة المتبقية حتى يقول مشارك آخر "توقف!" يحصل هذا المشارك على القطعة الجديدة الموجودة على يسار السكين ، وهكذا. حتى آخر مشارك (الذي لم يقل "توقف!") فيحصل على آخر قطعة متبقية.

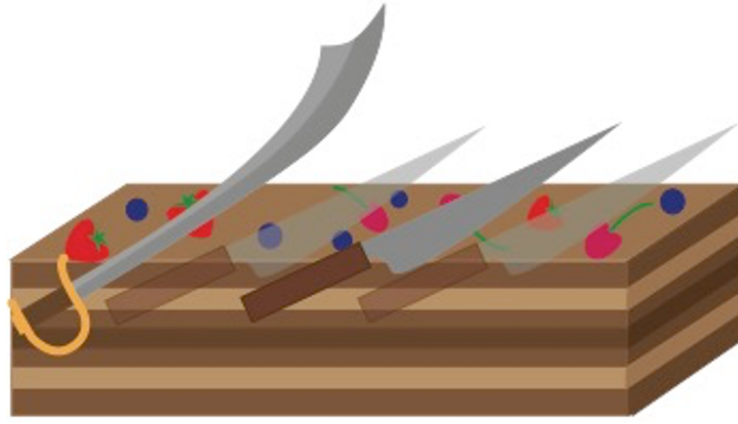


- جرب هذه الطريقة عدة مرات مع المجموعة بأكملها: يجب على الوسيط أن يحرك السكين ببطء شديد حتى يكون لدى المشاركين الوقت الكافي لحسم قرارهم . هل يشعر بعض المشاركين أنهم تلقوا قطعة أقل من نصيبهم أي أقل من $1/n$ من الكعكة كاملة ؟ إذا كان الأمر كذلك، كيف يمكنهم تعديل استراتيجيتهم؟
- هذه إستراتيجية التقسيم المتناسب: كل مشارك يقول "توقف!" لما يرى أن القيمة الموجودة على يسار السكين تساوي على الأقل $1/n$ من إجمالي قيمة الكعكة كاملة. اشرح لماذا تضمن هذه الإستراتيجية حصول كل مشارك على قطعة يقدرها على الأقل بـ $1/n$ من الكعكة كاملة.
- لاحظ أن هذه الإستراتيجية ليست خالية من الحسد. لماذا؟

نشاط 3 – تقسيم خال من الحسد لكعبة بين ثلاثة أشخاص

الهدف الآن هو تقسيم كعبة بحيث لا يحسد أي مشارك زميليه على قطعتي الكعبة اللاتي تلقاها.

- اسأل إن كان شخص يريد اقتراح طريقة ما.
- هذه إحدى الإستراتيجيات: الوسيط يحمل سيفاً ويحركه من اليسار إلى اليمين. في نفس الوقت، يقوم كل مشارك بتحريك سكينه على الجانب الأيمن من السيف. بمجرد أن يقول أحد المشاركين "توقف!" يتوقف الجميع عن تحريك سكاكينهم. ثم يتم تقطيع الكعبة في موضعين: موضع السيف وموضع السكين الأوسط. المشارك الذي قال "توقف!" يتحصل على القطعة الموجودة يسار السيف. أما بالنسبة للمشاركين المتبقيين، فالشخص الذي يكون سكينه في أقصى اليمين يحصل على القطعة اليمنى، ويحصل المشارك المتبقي على القطعة الوسطى.



- جرب هذه الطريقة عدة مرات مع أعضاء مختلفين يقومون بدور الوسيط. يجب على الوسيط أن يحرك السيف ببطء شديد حتى يكون لدى المشاركين الوقت الكافي لحسم قرارهم. هل هناك من المشاركين من يحسد مشاركا آخرًا على الحصة التي تلقاها؟ هل يرغب شخص اقتراح إستراتيجية لكيفية تحريك كل مشارك لسكينه؟
- فيما يلي إستراتيجية لتقسيم خال من الحسد:
 - يمسك كل مشارك بسكينه بحيث تكون القطعتان المتحادثتان به، والموجودتان على يمين السيف، متكافئتين في القيمة بالنسبة لهم.
 - دعنا نسمي "المشارك 1" الشخص الذي يكون سكينه في أقصى اليسار، "المشارك 2" الذي يكون سكينه في المنتصف، و "المشارك 3" الذي يكون سكينه في أقصى اليمين.
 - يقول المشارك الأول "توقف!" متى بدا له أن للقطعة اليسرى نفس القيمة بالنسبة للوسطى.
 - يقول المشارك الثاني "توقف!" عندما يكون للقطع الثلاث نفس القيمة بالنسبة لهم.
 - يقول المشارك رقم 3 "توقف!" عندما تكون قيمة القطعة اليسرى هي نفس قيمة القطعة اليمنى بالنسبة له.
- ناقش لماذا هذه الإستراتيجية خالية من الحسد. خذ وجهة نظر كل مشارك وشرح لماذا لا يحسد أي مشارك الآخرين على حصصهم.

نشاط 4 – توزيع خال من الحسد للأعمال المنزلية على ثلاثة أشخاص

إذا وضعنا الأعمال المنزلية في شبكة، يمكننا تقسيمها مثل الكعبة. في هذه الحالة، سيرغب كل مشارك في الحصول على جزء بسيط قدر الإمكان. وبالتالي، هدفنا هو ألا يحسد أي مشارك الآخرين على حصصهم من الأعمال المنزلية.

- هذه المسألة مماثلة للنشاط 3 ، ويمكن استنباط إستراتيجية منه. هل لديكم فكرة؟

- هذه إحدى الإستراتيجيات: الوسيط يحمل سيفاً ويحركه من اليسار إلى اليمين. في نفس الوقت، يقوم كل مشارك بتحريك سكينه على الجانب الأيمن من السيف. بمجرد أن يقول أحد المشاركين "توقف!" يتوقف الجميع عن تحريك سكاكينهم. ثم يتم تقطيع الشبكة في موضعين: موضع السيف وموضع السكين الأوسط. المشارك الذي قال "توقف!" يتحصل على القطعة الموجودة أقصى اليمين. أما بالنسبة للمشاركين المتبقين ، فالشخص الذي يكون سكينه في أقصى اليمين يحصل على القطعة الوسطى، ويحصل المشارك المتبقي على القطعة اليسرى.

تنظيف النوافذ	غسيل الملابس	طبخ	كى الملابس
تنظيف الأرضيات	غسل الأطباق	إخراج القمامة	إطعام القط
الكنس	سقي النباتات	تجهيز المائدة	التسوق من البقالة
تنظيف الحمام	جز العشب	كنس الحديقة	إصلاح ورسكلة

- جرّب هذه الطريقة عدة مرات مع أعضاء مختلفين يقومون بدور الوسيط. يجب على الوسيط أن يحرك السيف ببطء شديد جداً حتى يكون لدى المشاركين الوقت لحسم قرارهم. هل هناك من المشاركين من يحسد مشاركا آخراً على الحصة التي تلقاها؟ هل يرغب شخص اقتراح إستراتيجية لكيفية تحريك كل مشارك لسكينه؟

- فيما يلي إستراتيجية لتوزيع خالٍ من الحسد للأعمال المنزلية:

- يمسك جميع المشاركين بسكاكينهم حيث يكون للقطعتين: الموجودة في أقصى اليسار و الموجودة بين السيف والسكين الخاص بكل واحد منهم نفس القيمة بالنسبة لهم.
- دعنا نسمي "المشارك رقم 1" الشخص الذي يكون سكينه في أقصى اليسار ، و "المشارك رقم 2" الذي يكون سكينه في المنتصف ، و "المشارك رقم 3" الذي يكون سكينه في أقصى اليمين.
- يقول المشارك الأول "توقف!" متى وجدوا أن للقطعة اليسرى نفس القيمة بالنسبة للقطعة اليمنى.
- يقول المشارك الثاني "توقف!" عندما يكون للقطع الثلاث نفس القيمة بالنسبة لهم.

○ يقول المشارك رقم 3 "توقف!" لما يكون للقطعة الوسطى نفس القيمة بالنسبة للقطعة الصحيحة.

- ناقش لماذا هذه الإستراتيجية خالية من الحسد. خذ وجهة نظر كل مشارك و اشرح لماذا لا يحسد أي مشارك الآخرين على حصصهم.

انشىء وشارك

شارك بالصور ومقاطع الفيديو للنشاط أو الاستراتيجيات المقترحة من قبل المجموعة باستخدام الهاشتاغ:

#idm314.

تعمق في هذا الموضوع عن طريق هذه الفيديوهات:

- [See a different method to share a cake between three people, explained by Hannah Fry in a Numberphile video.](#)
- [Math Encounters - Fair Division: How to Cut Cakes \(and other things\) Fairly.](#) حديث عن التقسيم العادل للبروفيسور فرانسيس سو في متحف الرياضيات

© 2020 كريستيان روسو

© 2020 Christiane Rousseau

هذا العمل مرخص بموجب [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#)