



L'évolution de la confiance

Cette activité est une introduction à la *théorie des jeux*. Plus précisément, elle s'articule autour du célèbre *dilemme du prisonnier* et des concepts de jeu formel, de stratégie, de coopération/défection et de collaboration. Elle analyse mathématiquement une situation de compétition (simplifiée) entre deux joueurs et identifie les conditions dans lesquelles ces derniers peuvent développer une stratégie de coopération permettant un avantage mutuel, plutôt que d'appliquer une stratégie de compétition hostile.

La théorie des jeux et ce type d'analyse trouvent des applications en économie, en politique, en résolution de conflits, mais aussi en biologie évolutive dans le contexte de la compétition entre espèces.

Cette activité est basée sur le jeu en ligne: [L'évolution de la confiance](https://ncase.me/trust/) par Nicky Case (traduction de *The evolution of Trust*, <https://ncase.me/trust/>), et utilise ce jeu. Le jeu lui-même est basé sur le livre *Comment réussir dans un monde d'égoïstes: Théorie du comportement coopératif*, par Robert Axelrod (Odile Jacob, 2006, édition originale anglaise : *The evolution of cooperation*, Basic Books, 1984).

Participants :

Âge recommandé : à partir de 14 ans. Mais nous sommes curieux de savoir si l'activité peut aussi être utilisée avec des enfants plus jeunes: revenez-nous là-dessus. Aucune connaissance mathématique préalable n'est requise, mais certains raisonnements logiques, comme l'identification de paradoxes et la déduction, peuvent exiger une certaine maturité mathématique. Bien que l'activité ne porte pas sur la politique ou l'éthique, elle peut avoir des implications et alimenter des débats idéologiques.

Préparatifs :

La première partie de l'activité nécessite un ensemble de « pièces » (par exemple des pièces de monnaie ou autres objets) et quelques morceaux de papier. Le nombre de pièces est (idéalement) 30 fois le nombre d'élèves. Ces « pièces » peuvent être des pièces de monnaie de faible valeur ou être remplacées par des haricots secs, des pois chiches, des restes de pâtes, des écrous, ou tous autres petits objets similaires et peu coûteux. Le nombre de pièces par élève peut être réduit en diminuant le nombre maximal de parties jouées par paire d'élèves.

La deuxième partie de l'atelier nécessite l'utilisation d'un ordinateur par l'enseignant, connecté à un projecteur ou à un écran afin que tous les élèves puissent visionner les simulations et en discuter ensemble.

Introduction

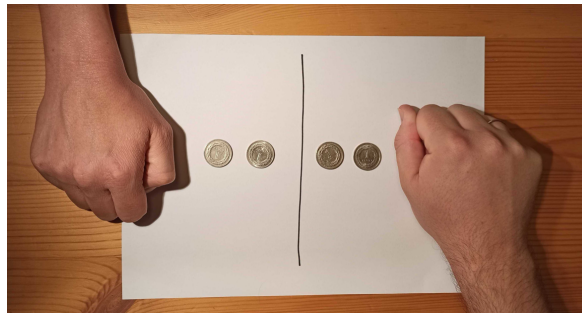
Aujourd'hui, nous allons explorer une branche des mathématiques qui pourrait vous surprendre : la *théorie des jeux*. Elle s'applique à la politique, à l'économie, à la résolution des conflits et même à la biologie évolutive. En théorie des jeux, on conçoit des *jeux formels*, qui sont des situations dans lesquelles deux joueurs ou plus doivent prendre des décisions rationnelles, en essayant d'atteindre un *but*, qui est de gagner la partie. Chaque joueur peut développer une *stratégie*, c'est-à-dire un ensemble de règles permettant de prendre ces décisions en fonction de l'environnement du jeu et également du comportement des autres joueurs.

Les échecs ou le poker sont des jeux. Mais on peut aussi utiliser des jeux pour modéliser de nombreuses applications concrètes, comme la fixation des prix des marchandises par les détaillants sur un marché concurrentiel, la négociation des conflits géopolitiques par les gouvernements ou l'évolution des espèces biologiques pour s'intégrer à un écosystème.

Nous allons jouer à un jeu très simple qui peut cependant susciter beaucoup de réflexions très profondes..

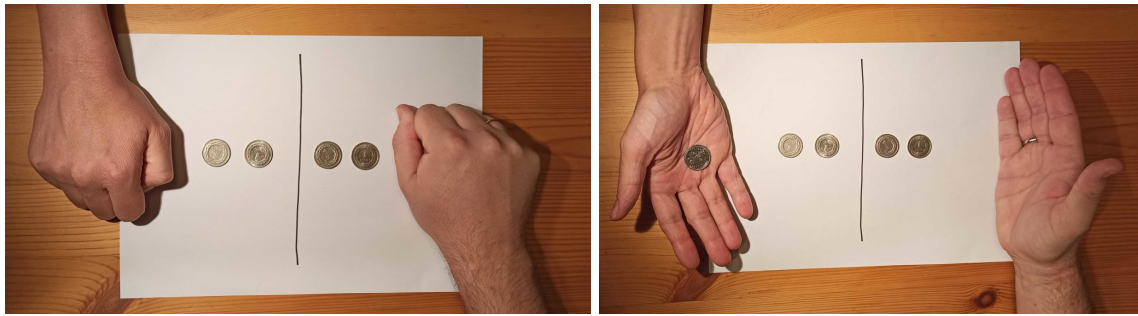
Le jeu (un tour)

Il s'agit d'un jeu pour deux joueurs. Ceux-ci doivent être assis à une table, face à face l'un de l'autre. Au centre de la table, placez une feuille de papier divisée en deux par une ligne comme sur la figure, chaque joueur s'appropriant le côté droit quand il regarde la feuille.



La feuille de papier représente la machine à billets. Le mécanisme de la machine est le suivant :

- Quatre pièces sont placées sur la machine, deux de chaque côté.
- Chaque joueur reçoit une pièce.
- Chaque joueur peut placer sa pièce dans la machine (à son côté droit de la feuille de papier) ou non. Si le joueur A place une pièce, les trois pièces de son côté (les deux de la machine et celle placée par le joueur A) sont données au joueur B. Si le joueur A ne place aucune pièce, le joueur B ne reçoit rien. De la même manière, si le joueur B place une pièce de son côté, le joueur A reçoit trois pièces ; sinon, il ne reçoit rien.
- Les deux joueurs doivent décider de leur action simultanément. Pour ce faire, ils placent secrètement une pièce ou rien dans leur main droite, sous la table. Ensuite, ils posent leur main droite sur la table et l'ouvrent en même temps.
- L'objectif dans le jeu est de gagner autant de pièces que possible.

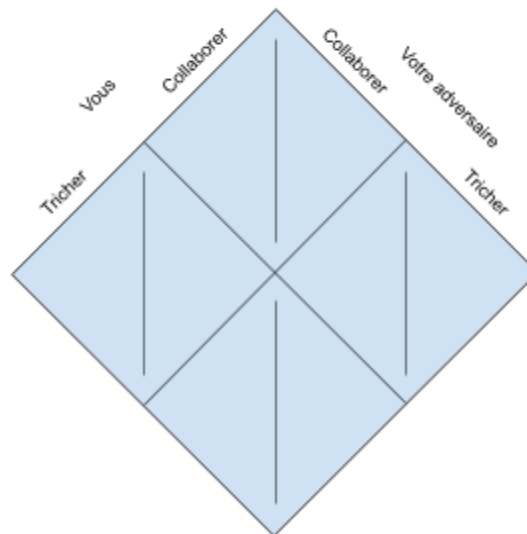


Vous devez payer une pièce pour que votre adversaire gagne trois pièces.

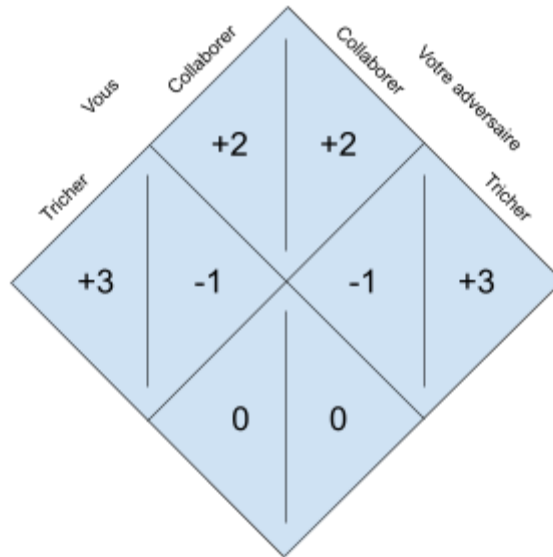
Analyse en un tour. Dilemme du prisonnier

Recueillez les impressions et les stratégies des élèves.

Appelons les deux actions possibles « *Collaborer* » (placer une pièce et récompenser son adversaire) et « *Tricher* » (ne pas placer de pièce et ne pas récompenser son adversaire). Créez un tableau à double entrée présentant les quatre résultats possibles de la partie.



Pour chacun des quatre résultats possibles, indiquez les gains de chaque joueur. Une valeur négative signifie que le joueur perd de l'argent.



Quelle est la meilleure stratégie ?

- Si votre adversaire coopère, vous pouvez, soit gagner +2 (si vous coopérez), soit gagner +3 (si vous trichez); il vous est donc préférable de tricher.
- Si votre adversaire triche, vous pouvez, soit perdre -1 (si vous coopérez), soit gagner 0 (si vous trichez); il vous est donc préférable de tricher.

Par conséquent, tricher est toujours préférable. Cependant, le même raisonnement s'applique à votre adversaire, qui décide, lui aussi, qu'il est plus avantageux de tricher. Vous trichez donc tous les deux et ne gagnez rien. Si vous aviez coopéré, le résultat aurait été meilleur pour vous deux (+2 chacun). D'où le dilemme...

Ce jeu est également appelé le *dilemme du prisonnier*, en raison d'une formulation différente mais analogue : deux voleurs sont en prison. Chacun peut accuser l'autre (tricher) ou garder le silence (coopérer). S'ils gardent le silence (ils coopèrent), ils écotent tous deux d'un an de prison. Si l'un accuse et que l'autre garde le silence, celui qui accuse est libéré et l'autre est condamné à trois ans de prison. Si les deux accusent, ils écotent tous deux de deux ans. Chaque prisonnier constate que, quelle que soit l'action de son adversaire, il est toujours préférable d'accuser l'autre, soit de tricher. Pourtant, ils arrivent à la même conclusion, trichent tous les deux, et écotent ainsi chacun de deux ans de prison alors qu'ils n'auraient écopé que d'un an s'ils avaient coopéré...

Jeu itéré

Il semble que, dans une partie, il est parfois préférable de tricher, même si l'on pourrait faire mieux, en raison du risque d'être dupé. On peut tenter de convaincre son adversaire par la parole, mais rien ne garantit qu'il tiendra parole. Cependant, la situation change lorsqu'on joue plusieurs fois. On peut alors adapter sa stratégie en fonction des actions précédentes de son adversaire.

Chaque joueur commence avec 10 pièces, et il y a également une réserve de 40 pièces (la Banque) qui alimente la machine.¹ Après chaque manche, la machine est réinitialisée à partir de la banque et contient à nouveau quatre pièces. Le jeu se joue plusieurs fois et le but est d'accumuler le plus de pièces possible.

Comme précédemment, vous pouvez faire recevoir des pièces à votre adversaire, mais cela vous coûte de l'argent. De même, votre adversaire peut aussi vous offrir une récompense, moyennant un coût. Votre adversaire ignore ce que vous jouerez au prochain tour, mais il se souvient de vos actions précédentes.

Jouez plusieurs parties et essayez d'élaborer une stratégie. Après avoir joué avec un camarade, changez de partenaire. Enfin, partagez vos conclusions et les stratégies que vous avez utilisées avec le reste de la classe.

Notez les stratégies inscrites au tableau. Voici quelques exemples de stratégies qui pourraient y figurer :

- **TRICHEUR** : Tricher toujours.
- **COOPÉRATEUR** : Toujours coopérer.
- **COPYCAT** : Commencer par coopérer, puis faire la même chose que le dernier coup de l'adversaire.
- **RANCUNIER** : Commencer par coopérer, continuer à coopérer, mais si vous trichez, je tricherai pour toujours.
- **DÉTECTIVE** : Faire quelques manches pour tester la stratégie de l'adversaire pour ensuite l'exploiter, (par exemple en jouant coopérer, tricher, coopérer, coopérer). Ensuite, si l'adversaire ne triche jamais, profiter de sa faiblesse en trichant systématiquement. Si l'adversaire triche à l'occasion, user de prudence en jouant COPYCAT.

Si une autre stratégie apparaît, notez-la au tableau et trouvez-lui un nom approprié.

Discutez de la stratégie la plus efficace.

Point clé : Il n'existe pas de meilleure stratégie en termes absolus.

Exercice : Démontrez qu'aucune stratégie n'est optimale indépendamment de celle de l'adversaire. Indice : Imaginez que votre adversaire soit un tricheur. Quelle est la meilleure stratégie ? Imaginez que votre adversaire soit un rancunier. Quelle est la meilleure stratégie ?

En conclusion, il est impossible de garantir le meilleur résultat indépendamment de la stratégie de votre adversaire. Cela diffère d'autres jeux comme le jeu des échecs, où il faut toujours chercher à jouer le coup qui vous offre le plus d'avantage.

¹ Ceci est valable pour 10 manches. Pour n manches, chacun des deux joueurs doit commencer avec n pièces et la machine avec $4n$ pièces afin de tenir compte des cas extrêmes où les joueurs ou la machine épuisent tout leur argent.

Point clé : Il est nécessaire de répéter le jeu pour que la coopération s'installe. L'historique des parties permet d'évaluer l'adversaire. De plus, la possibilité d'une rencontre future est essentielle ; le jeu devrait donc se dérouler sur un nombre de manches indéterminé.

Exercice : Démontrez que si les joueurs connaissent le nombre de manches à jouer, le dilemme initial se pose à nouveau : la meilleure stratégie consiste systématiquement à tricher. Indice : lors de la dernière manche, il n'y a plus d'influence sur l'avenir, donc la meilleure stratégie est de tricher (comme lors d'une manche unique). Une fois que vous et votre adversaire avez décidé de tricher lors de la dernière manche, la dernière manche susceptible d'avoir un impact est l'avant-dernière ; il est donc avantageux de tricher. Par induction, vous tricherez tous les deux systématiquement. Discutez cependant de la validité de ce raisonnement inductif.

Simulations informatiques

Il est maintenant temps d'utiliser l'ordinateur pour simuler des centaines de parties et analyser les résultats. Cela permettra de déterminer quelle est la meilleure stratégie.

Le professeur allume l'ordinateur et le projecteur pour toute la classe et lance le jeu en ligne, *L'évolution de la confiance*, par Nicky Case ([version française](https://ncase.me/trust/) de <https://ncase.me/trust/>). Vous pouvez accéder directement à la **section 3. Un tournoi** du jeu (voir les sections au bas de l'écran).

Nous comparons ici cinq stratégies en analysant tous les affrontements possibles entre deux adversaires utilisant des stratégies différentes.

Note : Faites votre pari, ou faites parier chaque élève, comme indiqué dans le jeu. Vous pouvez analyser chaque match entre deux joueurs. (Vous pouvez ignorer les commentaires sur l'histoire de la Première Guerre mondiale à la section d'introduction).

Point clé : La stratégie gagnante (sous quelques bémols discutés ci-dessous) est la stratégie COPYCAT. Cette stratégie, également appelée « œil pour œil, dent pour dent », peut être perçue comme un principe moral : rendre aux autres ce qu'ils vous font. Elle allie la volonté de coopérer à la protection contre les abus d'autrui. Il est essentiel de noter que l'efficacité de cette stratégie est un fait mathématique reconnu, et non le fruit d'une quelconque éthique humaine.

Évolution

Imaginons maintenant un scénario avec de nombreux joueurs, chacun adoptant une stratégie différente. Certains joueurs seront plus performants (les gagnants) que d'autres (les perdants). Supposons que les perdants décident de changer de stratégie et d'adopter celle des gagnants. Que se passera-t-il à long terme ? La population évoluera-t-elle vers un état où tous les joueurs appliqueront la même stratégie ?

Dans le jeu, allez à la **section 4. Tournoi répété**. Suivez attentivement l'explication pour comprendre pourquoi la stratégie COPYCAT remporte à nouveau le tournoi.

Esprit critique

Bien que la stratégie COPYCAT semble gagnante, c'est un jeu très subtil. Plusieurs raisons peuvent expliquer un échec :

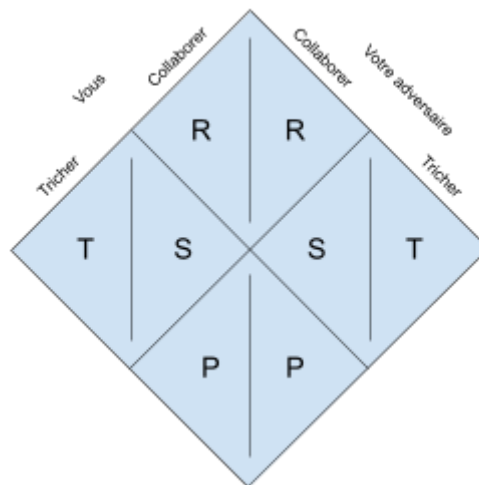
- Manque d'interactions. Pour y remédier, augmentez le nombre de manches par parties.

Point clé : Avec peu d'interactions, comme lors d'une seule manche, il n'y a pas assez de temps pour que la confiance et la collaboration s'installent, et les joueurs qui jouent TRICHEUR peuvent obtenir de meilleures récompenses.

- Incitatifs insuffisants à coopérer

Point clé : Ce jeu est un jeu à somme non nulle. Cela signifie que les deux joueurs peuvent y gagner, ce qui favorise la collaboration. Dans ce jeu, cela découle du fait que la machine génère de l'argent. À l'inverse, dans un jeu à somme nulle, tout gain d'un joueur est forcément une perte pour l'autre. Dès lors, toute collaboration est impossible, car il n'y a pas d'intérêt commun à atteindre.

Exercice. Analysez les compromis indiqués sur le graphique



où:

R = récompense pour coopération mutuelle

S = duperie (je coopère, il triche)

T = tentation (je triche, il coopère)

P = punition pour tricherie mutuelle

Partie 1 : Classez les quatre quantités afin d'encourager la coopération.

Réponse :

$$T > R > P > S.$$

Partie 2 : Trouver une condition pour que la coopération soit préférable à une situation où l'on gagne la moitié du temps et où l'on perd l'autre moitié (ceci se produit en absence de coopération, chaque joueur exploitant l'autre à tour de rôle).

Réponse :

$$R > \frac{T + S}{2}.$$

Ces deux équations définissent le jeu appelé « *dilemme du prisonnier* ».

Erreurs

Supposons qu'un joueur ait un faible pourcentage de probabilité que son action soit modifiée par erreur, faisant le contraire de ce que sa stratégie prévoit.

Dans ce cas précis, par exemple, COPYCAT s'engagerait dans une chaîne de représailles mutuelles sans fin.

Introduire de nouvelles stratégies pour gérer les erreurs aléatoires.

- COPYKITTEN : Similaire à COPYCAT, la stratégie est de copier le dernier coup de l'adversaire s'il coopère, et de ne tricher que si les deux derniers coups de l'adversaire sont des tricheries. Cette stratégie est plus tolérante que COPYCAT.
- SIMPLET : Commencez par coopérer. Ensuite, si l'adversaire coopère, je fais la même chose qu'auparavant ; si l'adversaire triche, je fais le contraire.
- ALÉATOIRE : Choix aléatoire de coopérer ou de tricher avec une chance sur deux pour chaque choix.

Essayez les tournois avec des joueurs utilisant ces nouvelles stratégies.

Bac à sable

Essayez de trouver une configuration du jeu (nombre et type de joueurs, gains, règles du tournoi) où tous les joueurs ne sont pas initialement identiques, de sorte que :

- La stratégie ALÉATOIRE gagne..
- La stratégie COOPÉRATEUR gagne.
- Deux types de joueurs jouant des stratégies différentes survivent.
- Trois types de joueurs jouant des stratégies différentes survivent.
- Explorez par vous-même d'autres configurations.

Conclusions

Récapitulez les points clés et ouvrez le débat.

Voici quelques points clés pour favoriser la collaboration :

- Le rôle des interactions répétées :
 - On ne peut pas collaborer si l'on n'a pas le temps d'apprendre les uns des autres.
 - La collaboration est perdante s'il n'y a pas d'avenir sur lequel exercer une influence.
- Il existe des possibilités de situations gagnant-gagnant :
 - On ne peut pas collaborer dans un jeu à somme nulle. Mais beaucoup de jeux dans la vie réelle ne sont pas des jeux à somme nulle, permettant à tous les joueurs de gagner quelque chose.
 - Rappelons les contraintes mathématiques sur T, R, S et P.
- Faible niveau de mauvaise communication :
 - Il est payant de savoir pardonner et de surmonter quelques petits malentendus.
- Il n'existe pas de meilleure stratégie, qui soit indépendante des autres joueurs, vous devez vous adapter à l'environnement.
- Ne soyez pas envieux :
 - On ne peut pas collaborer si l'on a pour objectif de surpasser les autres.
- Ne soyez pas le premier à tricher :
 - Vous devez réagir si vous êtes trompé, mais tricher en premier lieu engendre la méfiance, et la collaboration doit être rétablie par la suite.
- Réagissez à la coopération et à la tricherie :
 - L'absence de réaction entraînera des abus ou de la méfiance.
- Ne soyez pas trop malin :
 - Faites comprendre votre stratégie aux autres joueurs ; cela instaure la confiance car le résultat est plus prévisible.

Contexte et ressources mathématiques

Cette activité est basée sur le jeu *L'évolution de la confiance*, de Nicky Case (<https://ncase.me/trust/>), [version française](#).

Le jeu est basé sur le livre, *The evolution of cooperation*, par Robert Axelrod (1984), et la suite du même auteur, *The complexity of cooperation* (1997).

Plus de ressources à <https://ncase.me/trust/notes/>

Créez et partagez !

Partagez les résultats des participants en utilisant les hashtags. **#idm314trust** et **#idm314**.

© 2025 Daniel Ramos

Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la licence : [Licence Creative Commons Attribution 4.0 International](#).