



# اليوم العالمي للرياضيات 14 مارس

## تطور الثقة

هذا النشاط هو مدخل إلى نظرية الألعاب، وبشكل أدق، يتمحور حول اللعبة الشهيرة "معضلة السجين" و مفاهيم اللعبة الصورية، الإستراتيجية، التعاون/الغش، و العمل المشترك. يقوم هذا النشاط بتحليل رياضي لسيناريو تنافسي (مبسّط) بين لاعبين متنافسين، ويقدم الشروط التي يمكن للاعبين في ظلها تطوير استراتيجية تعاون لتحقيق منفعة متبادلة، بدلاً من تطبيق استراتيجية تنافس عدائي.

لنظرية الألعاب وهذا النوع من التحليل تطبيقات في الاقتصاد، والسياسة، وحل النزاعات، وكذلك علم الأحياء التطوري في سياق الأنواع المتنافسة.

هذا النشاط مبني على اللعبة الإلكترونية *تطور الثقة* من إعداد نيكي كيس (<https://ncase.me/trust>) والتي تعتمد بدورها على كتاب *تطور التعاون* لروبرت أكسلورد (الطبعة الإنجليزية الأصلية: Basic Books 1984).

### المشاركون:

الأعمار الموصى بها: 14 سنة فما فوق. لا تُشترط معرفة رياضية مسبقة، إلا أن بعض الحجج المنطقية – مثل تحديد المفارقات وبناء الاستنتاجات – قد تتطلب نضجاً في التفكير الرياضي. وعلى الرغم من أن النشاط لا يتناول السياسة أو الأخلاقيات، إلا أنه قد تبرز منه دلالات تثير نقاشاً فكرياً و أيديولوجياً.

### التحضيرات:

يتطلب الجزء الأول من النشاط مجموعة من العملات المعدنية وبعض الأوراق. يفضّل أن يكون عدد العملات 30 ضعف عدد الطلاب. يمكن استخدام عملات حقيقية (بقيمة منخفضة لتقليل التكلفة)، أو استبدالها بـ حبوب الفاصوليا الجافة، أو الحمص، أو قطع المعكرونة، أو الصواميل المعدنية، أو أي أشياء صغيرة متماثلة يمكن الحصول عليها بتكلفة بسيطة. وأيضاً يمكن تقليل عدد العملات لكل طالب عن طريق تقليل العدد الأقصى للجولات التي تلعب بين كل زوج من اللاعبين.

يتطلب الجزء الثاني من الورشة استخدام حاسوب من قبل المعلم متصل بجهاز عرض (بروجكتور) أو شاشة، حتى يتمكن جميع الطلاب من مشاهدة المحاكاة و المناقشة معاً.

### المقدمة

اليوم سنتعرف على فرع من فروع الرياضيات قد يدهشكم. يسمى *نظرية الألعاب*، ويطبّق في السياسة، والاقتصاد، وحل النزاعات، وكذلك في علم الأحياء التطوري. في نظرية الألعاب، نقوم بتصميم ألعاب صورية، هي عبارة عن مواقف يتعين فيها على لاعبين أو أكثر

اتخاذ قرارات عقلانية بهدف الوصول إلى هدف يجعلهم يفوزون باللعبة. يمكن لكل لاعب تطوير استراتيجية، وهي أي مجموعة من القواعد لاتخاذ القرارات اعتمادًا على بيئة اللعبة و سلوك اللاعبين الآخرين.

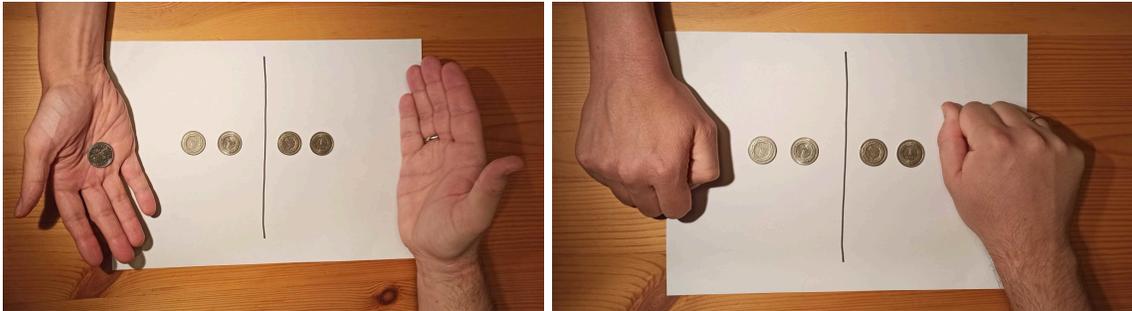
الشطرنج و البوكر ألعاب، وأيضًا تحديد أسعار السلع في سوق تنافسي، أو تفاوض الحكومات حول النزاعات الجيوسياسية، أو تطور الأنواع الحية للتأقلم داخل نظام بيئي، كلها أمثلة واقعية يمكن نمذجتها على أنها ألعاب.

سنلعب لعبة بسيطة جدًا، لكنها قادرة على إثارة الكثير من الأفكار.

## اللعبة (جولة واحدة)

هذه لعبة مخصصة للاعبين اثنين. يجب أن يجلس اللاعبان على طاولة، بحيث يكون كلٌ منهما مواجهًا للآخر. في منتصف الطاولة، تُوضَع ورقة مقسومة بواسطة خط مرسوم، يكون النصفان على الجهتين اليمنى و اليسرى بالنسبة للاعبين. وتمثل الورقة آلة النقود. آلية عمل الآلة كما يلي:

- توضع أربع عملات على الآلة، عملتان على كل جانب.
- يحصل كل لاعب على عملة.
- يمكن لكل لاعب أن يضع عملة واحدة في الآلة (على يمينه من الورقة)، أو ألا يضع شيئًا. إذا وضع اللاعب أ عملة على جانبه الأيمن من الآلة، فإن العملات الثلاث الناتجة (العملتان الموجودتان على الآلة بالإضافة إلى العملة التي وضعها اللاعب أ) تمنح للاعب ب. وإذا لم يضع اللاعب أ عملة، فلن يحصل اللاعب ب على شيء. و بالمثل، إذا وضع اللاعب ب عملة، يحصل اللاعب أ على ثلاث عملات، وإلا فلن يحصل اللاعب أ على شيء.
- يجب على كلا اللاعبين اتخاذ قرارهما في الوقت نفسه. ولتحقيق ذلك، يضع كل لاعب سرًا – تحت الطاولة – عملة أو لا يضع شيئًا في يده اليمنى، ثم يضع اللاعبان أيديهما اليمنى على الطاولة و يفتحانها في الوقت نفسه.
- الهدف في اللعبة هو كسب أكبر عدد ممكن من العملات المعدنية.

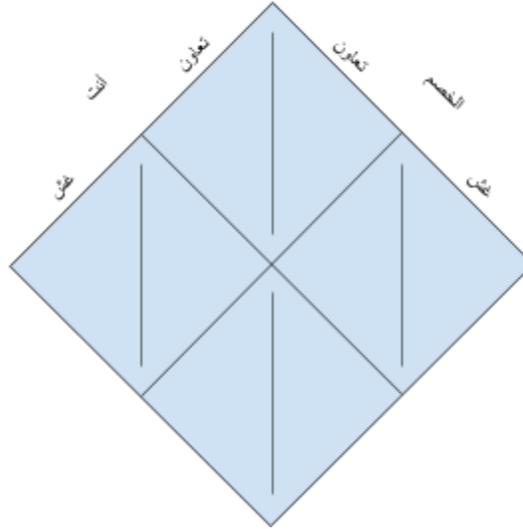


أنت تدفع عملة واحدة ليكسب خصمك ثلاث عملات

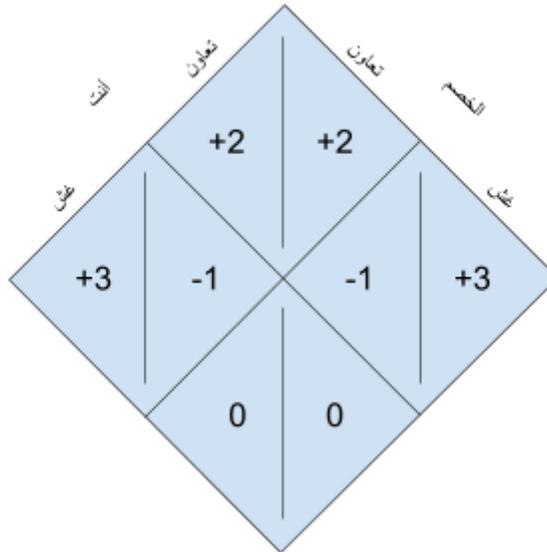
## تحليل جولة واحدة. معضلة السجين

اجمع الانطباعات و الاستراتيجيات التي استنتجها الطلاب.

لنسمّ الفعلين الممكنين اللذين يمكن للاعب اتخاذهما "التعاون" (وضع عملة ومكافأة الخصم) و "العش" (عدم وضع عملة وعدم منح الخصم أي مكافأة). انشئ جدولاً ذا مدخلين يبين النتائج الأربع الممكنة للعبة.



وفي كل من النتائج الأربع الممكنة، ضع المكافآت التي يحصل عليها كل لاعب. القيمة السالبة تعني أن اللاعب خسر مالياً.



ما هي أفضل استراتيجية؟

- إذا تعاون خصمك، فإنك تربح +2 (إن تعاونت) أو تربح +3 (إن غششت)، إذن الأفضل أن تغش.
- إذا غش خصمك، فإنك تخسر -1 (إن تعاونت) أو تربح 0 (إن غششت)، إذن الغش أفضل.

إذًا، في جميع الحالات يبدو أن الغش هو الخيار الأفضل. لكن المنطق نفسه ينطبق على خصمك، فيقرّر هو أيضًا الغش. و النتيجة كلاهما يغش و لا يربح شيئًا. و لو أنكما تعاونتما معًا، لكنت النتيجة أفضل لكليهما (+2 لكل لاعب) و هنا تكمن المعضلة.

تسمى هذه اللعبة أيضًا بمعضلة السجين، نسبة الى صياغة أخرى متماثلة: يقبض على لصين. يمكن لكل واحد منها إما أن يتهم الآخر أو أن يلتزم بالصمت. إذا التزما الصمت (أي تعاونا)، يحصل كل منهما على حكم بالسجن سنة واحدة. إذا اتهم أحدهما الآخر وبقي الآخر صامتًا، يُفرج عن المتهم و يحكم على الآخر بثلاث سنوات. وإذا اتهم الاثنان بعضهما، يُحكم على كل منهما بسنتين. يرى كل سجين أنه مهما كان الفعل الذي يتخذه السجين الآخر، فإن الغش هو الخيار الأفضل في جميع الحالات، غير أن كليهما يصل إلى نفس النتيجة فيقرران الغش، و نتيجةً لذلك يحكم على كلٍ منهما بالسجن لمدة سنتين، في حين كان بإمكانهما الإكتفاء بعقوبة سنة واحدة فقط لو تعاونوا.

## اللعبة المتكررة

يبدو أنه في لعبة واحدة يكون الغش هو الخيار الأفضل، حتى لو كان من الممكن تحقيق نتيجة أفضل، وذلك بسبب خطر التعرّض للخداع. يمكن محاولة إقناع الخصم بالكلام، لكن لا يمكن أبدًا التأكد من أنه سيوفي بوعده. غير أن الوضع يتغيّر عندما نلعب اللعبة بشكل متكرّر؛ إذ يصبح بالإمكان اتخاذ القرارات بناءً على الأفعال السابقة للخصم، بالإضافة إلى قواعد اللعبة نفسها. يبدأ كل لاعب ب 10 عملات، كما توجد مجموعة من 40 عملة (البنك) تُستخدم لإعادة تعبئة الآلة<sup>1</sup>. بعد كل جولة، تعاد تهيئة الآلة (من البنك) بحيث تحتوي مرة أخرى على أربع عملات. تلعب اللعبة عدة مرات، و يكون الهدف هو تجميع أكبر عدد ممكن من العملات.

لاحظ أنه يمكنك، مرة أخرى، منح خصمك عملات، لكن ذلك يكلفك مالاً. وبالمثل، يمكن لخصمك أيضاً أن يمنحك مكافأة مقابل ثمن. لا يعلم خصمك ما ستلعبه في الجولة التالية، لكنه يتذكر أفعالك السابقة.

العب عدة جولات وحاول ابتكار استراتيجية. بعد اللعب مع زميل، انتقل للعب مع زميل آخر. في النهاية، شارك نتائجك والاستراتيجيات التي استخدمتها مع بقية الصف.

اكتب الاستراتيجيات على السبورة. إليك بعض الاستراتيجيات التي قد تظهر:

- الغشاش: يغش دائماً.
- المتعاون: يتعاون دائماً.
- المقلد: يبدأ بالتعاون، ثم يفعل ما فعله الخصم في المرة السابقة.
- الحاقق: يبدأ بالتعاون ويستمر فيه، ولكن إن غش الخصم فإنه سوف يغشه للأبد.

<sup>1</sup> هذا الإعداد مخصص ل 10 جولات. و لعدد ن من الجولات، يحتاج كل لاعب البدء ب ن من العملات، و تحتاج الآلة إلى 4ن من العملات لتغطية الحالات التي قد تنفذ فيها أموال اللاعبين أو الآلة

- المحقق: يلعب عدة جولات لاختبار الخصم (مثلاً: تعاون، غش، تعاون، تعاون). ثم، إن لم يغش الخصم أبداً، سوف يستغله بالغش دائماً. وإن غش الخصم في أي مرحلة، عندئذ يكون حذراً ويفعل كما يفعل المقلد.

إذا ظهرت أي استراتيجية أخرى، فاكتبها على السبورة واختر لها اسماً مناسباً.

ناقشوا أي الاستراتيجيات هي الأفضل.

**فكرة أساسية:** لا توجد استراتيجية أفضل بشكل مطلق.

**تمرين:** أثبت أنه لا توجد استراتيجية مثلى بمعزل عن استراتيجية الخصم. تلميح: تخيل أن خصمك غشاش. ما هي أفضل استراتيجية؟ تخيل أن خصمك حاقد. ما هي أفضل استراتيجية؟

ختاماً، لا توجد طريقة لضمان أفضل نتيجة بمعزل عن استراتيجية الخصم. وهذا يختلف عن لعبة الشطرنج، على سبيل المثال، حيث يجب عليك دائماً محاولة لعب النقلة التي تمنحك أكبر قدر من الأفضلية.

**فكرة أساسية:** تكرار اللعبة ضروري لبناء الثقة. اللعب لعدة جولات يسمح لك بتقييم خصمك. كما أن احتمالية جولات مستقبلية ضروري، لذا يجب لعب اللعبة لعدد غير محدد من الجولات.

**تمرين:** أثبت أنه إذا عرف اللاعبون مسبقاً عدد الجولات التي ستلعب، فإن المعضلة الأصلية تعود للظهور، أي يمكنك إثبات أن أفضل استراتيجية هي الغش دائماً. تلميح: في الجولة الأخيرة، لا يوجد مستقبل للتأثير عليه، لذا فإن أفضل استراتيجية هي الغش (كما هو الحال مع جولة واحدة فقط). بمجرد أن تقرر أنت وخصمك الغش في الجولة الأخيرة، فإن الجولة الأخيرة لاتخاذ أي قرار هي ما قبل الأخيرة، لذا فإن الغش مُجدٍ بالاستقراء، ستغشان دائماً. ناقش صحة هذه الحجة الاستقرائية.

## محاكاة الحاسوب

حان الآن وقت استخدام الحاسوب لمحاكاة مئات الجولات وتحليل نتائجها. سيُسهم هذا في تحديد أفضل استراتيجية.

يُشغل المعلم الحاسوب وجهاز العرض لجميع الطلاب، ثم ينتقل إلى اللعبة الإلكترونية "تطور الثقة" من إعداد نيكي كيس (<https://ncase.me/trust>). يمكنكم الانتقال مباشرةً إلى القسم 3. بطولة واحدة.

في هذا القسم، نقارن خمس استراتيجيات من خلال مقارنة كل جولة مُحتملة بين أي خصمين يستخدمان استراتيجيات مختلفة.

**ملاحظة:** ضع رهانك، أو اطلب من كل طالب وضع رهان، كما هو موضح في اللعبة. يُمكنكم تحليل كل مباراة بين لاعبين. يُمكنكم تجاهل التعليقات المتعلقة بقصة الحرب العالمية الأولى.

فكرة أساسية: الفائز هو المقلد. هذه الاستراتيجية، التي تُعرف أيضاً باسم "المعاملة بالمثل"، يمكن اعتبارها مبدأً أخلاقياً. عامل الناس كما يعاملونك. فهي تجمع بين الرغبة في التعاون، لكن في الوقت نفسه، الدفاع عن النفس ضد تجاوزات الآخرين. ومن المهم ملاحظة أن فعالية هذه الاستراتيجية حقيقة رياضية، وليست شيئاً تفرضه أي أخلاقيات إنسانية.

## التطور

لنحاكي الآن سيناريو يضم العديد من اللاعبين، لكل منهم استراتيجية محددة. سيتفوق بعض اللاعبين (الفائزون) على غيرهم (الخاسرون). لنفترض أن الخاسرين قرروا تغيير استراتيجيتهم وتقليد استراتيجية الفائزين. ماذا سيحدث على المدى البعيد؟ هل سيتطور الوضع إلى حالة يطبق فيها الجميع نفس الاستراتيجية؟

في اللعبة، انتقل إلى القسم 4: البطولة المتكررة. تابع الشرح بتمعن لتفهم سبب فوز المقلد بالبطولة مرة أخرى.

## انعدام الثقة

على الرغم من أن استراتيجية المقلد تبدو رابحة، إلا أنها لعبة حساسة للغاية. قد تسوء الأمور لعدة أسباب:

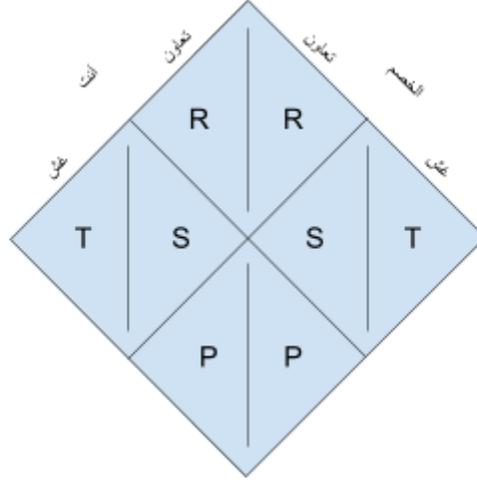
- قلة التفاعلات. جرب محاكاة اللعبة بتقليل عدد الجولات في كل مباراة.

فكرة أساسية: مع قلة التفاعلات، كما في جولة واحدة فقط، لا يوجد وقت كافٍ لبناء الثقة اللازمة للتعاون، وبالتالي يحصل اللاعبون الغشاشون على مكافآت أكبر.

- عدم وجود حافز كافٍ للتعاون. غير المكافآت ولاحظ كيف تتغير استراتيجية الفوز.

فكرة الأساسية: هذه اللعبة ليست لعبة محصلتها صفرية. هذا يعني أن كلا اللاعبين يمكنهما تحقيق وضع مربح للطرفين، وهذا ما يعزز التعاون. في هذه اللعبة، ينبع ذلك من كون الآلة تُنتج أموالاً جديدة. على نقيض آخر، إذا كانت اللعبة ذات محصلة صفرية، حيث يكون كل ما يربحه أحد اللاعبين خسارة للآخر. عندها يستحيل تطوير التعاون لعدم وجود منفعة مشتركة.

تمرين: قارن بين المفاضلات الموضحة في الجدول.



حيث:

R = مكافأة التعاون المتبادل

S = عائد الخاسر

T = إغراء الغش

P = عقاب الغش المتبادل

الجزء 1: رتب الكميات الأربع لتشجيع التعاون.

الإجابة:

$$T > R > P > S$$

الجزء 2: أوجد شرطًا يجعل التعاون أفضل من الفوز نصف الوقت والخسارة نصف الوقت (أي عدم تعاون كل لاعب واستغلاله للآخر بالتناوب).

الإجابة:

$$R > \frac{T+S}{2}$$

هاتان المعادلتان تُعرِّفان "العبة معضلة السجين".

## الأخطاء

لنفترض أن لدى اللاعب احتمالاً ضئيلاً لتغيير أفعاله بسبب خطأ، مما يؤدي إلى عكس ما قصده في استراتيجيته.

في هذه الحالة، على سبيل المثال، سيدخل اللاعب المُقلد في سلسلة من الردود المتبادلة إلى ما لا نهاية.

قدّم بعض الاستراتيجيات الجديدة التي تتعامل مع الأخطاء العشوائية.

- المُقلد المتسامح: على غرار المُقلد، سينسخ المُقلد المتسامح آخر حركة للخصم إذا كان متعاونًا، ولكنه سيغش فقط إذا كانت آخر حركتين للخصم غشًا. وهو أكثر تسامحًا من المُقلد.
- البسيط: يبدأ بالتعاون. ثم، إذا تعاون الخصم، سيفعل نفس ما فعله في حركته السابقة، وإذا غش الخصم، سيفعل عكس ما فعله في حركه الأخيرة.
- العشوائي: يختار عشوائيًا بنسبة 50/50.

جرّب بطولات مع هؤلاء اللاعبين الجدد.

## وضع التجربة

حاول إيجاد إعدادات للعبة (عدد اللاعبين وأنواعهم، المكافآت، وقواعد البطولة)، بحيث لا يكون جميع اللاعبين متطابقين في البداية، وبحيث يتحقق ما يلي:

- يفوز العشوائي.
- يفوز المتعاون.
- يبقى نوعان مختلفان من اللاعبين.
- تبقى ثلاثة أنواع مختلفة من اللاعبين.
- استكشف بنفسك.

## الخلاصة

لخص جميع الأفكار الأساسية، و افتح باب للنقاش والجدل.

من أهم النقاط لتعزيز التعاون:

- التفاعلات المتكررة
  - لا يمكن التعاون إذا لم يتوفر لدينا الوقت الكافي للتعلم من بعضنا البعض.
  - لا يمكن التعاون إذا لم يكن هناك مستقبل نُؤثر فيه.
- إمكانية تحقيق مكاسب متبادلة
  - لا يمكن التعاون في لعبة محصلتها صفر. لكن معظم الألعاب في الحياة الواقعية ليست ألعاب محصلتها صفر، مما يسمح لجميع اللاعبين بالفوز.
  - تذكر القيود الرياضية على T و R و S و P.
- قلة سوء الفهم
  - من المجدي التسامح وتجاوز بعض سوء الفهم البسيط.
- لا توجد استراتيجية مثلى بمعزل عن اللاعبين الآخرين، يجب التكيف مع البيئة.
- لا تكن حسودًا

- لا يمكنك التعاون إذا كنت تتوقع أفضل النتائج لنفسك فقط، أو إذا كان هدفك هو التفوق على الآخرين.
- لا تكن البادئ بالغش
- يجب عليك الرد إذا تعرضت للغش، لكن الغش أولاً يُولد انعدام الثقة، ويجعل التعاون بحاجة إلى إعادة بناء لاحقًا.
- بادل التعاون والغش بالمثل
- عدم الرد سيؤدي إلى إساءة المعاملة أو انعدام الثقة.
- لا تكن شديد الدهاء
- دع اللاعبين الآخرين يفهمون استراتيجيتك، فهذا يعزز الثقة لأن النتيجة تصبح أكثر قابلية للتوقع.

## الخلفية الرياضية والمراجع

يعتمد هذا النشاط على لعبة تطوّر الثقة من إعداد نيكي كيس (<https://ncase.me/trust>).

وتستند اللعبة إلى كتاب تطوّر التعاون لروبرت أكسلرود (1984)، وجزئه الثاني تعقيد التعاون (1997) من إعداد نفس الكاتب.

يمكن الاطلاع على مزيد من الموارد على الرابط: <https://ncase.me/trust/notes>

أبدع وشارك!

شارك نتائج المشاركين باستخدام الهاشتاق [#idm314trust](#) و [#idm314](#)

© 2025 دانيال راموس

هذا العمل مرخص بموجب [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#)