



Tutulmaların matematiği

[13-14 Mart 2025](#) tarihinde, tam da 2025 Dünya Matematik Günü (IDM) 2025 bir ay tutulması meydana geliyor. Tam bir tutulma olacak ve Amerika kıtasının büyük bir bölümünde görülecek. Altı ay sonra da, 7-8 Eylül 2025'te Asya, doğu Afrika ve Avustralya'dan görülebilecek bir ay tutulması daha olacak. Bu ay tutulmaları, tutulmaların matematiğini tartışmak için güzel bir fırsat.

Katılımcılar:

13 yaş ve üzeri

Matematik ön bilgisi pek fazla gerekmiyor ama Dünya ve Ay'ın hareketleri hakkında temel bilgiler gerekecek.

Etkinlik:

Güneş, Dünya ve Ay'ın fiziksel bir modelini yapmak.

Tutulma olgusunun ardındaki matematiği paylaşmak.

Malzemeler:

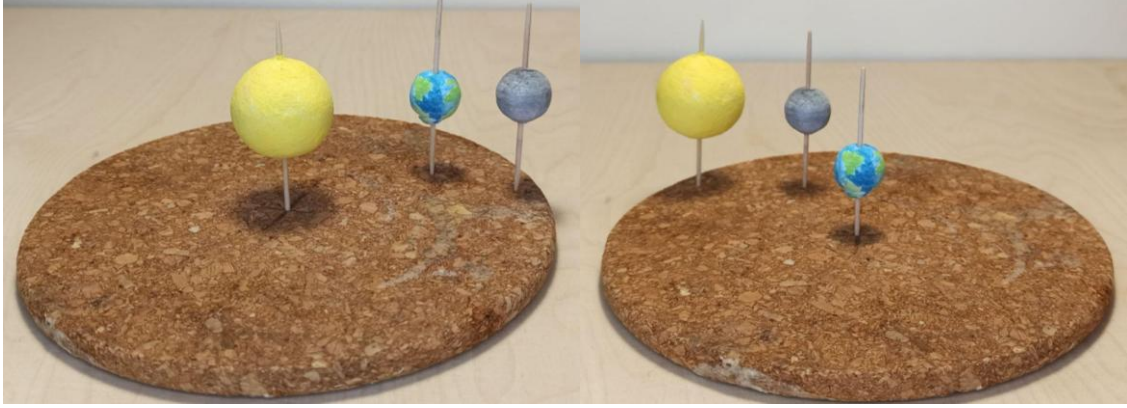
- Sıkıştırılmış pamuk, strafor, ahşap gibi malzemelerden yapılmış 3 adet top. Toplarda bir şey geçirmek için birer delik olmalı. İki veya üç boyda olsalar iyi olur.
- Topların arasına sıkıştırmak için kürdanlar.
- Topları renklendirmek için boya.
- Kürdanları sabitlemek için mantar veya karton bir yüzey.

Hazırlık:

- Büyük topu sarıya (Güneş), orta boy topu yeşil ve maviye (Dünya) ve küçük topu gri rengine (Ay) boyayın.

1. Düzlemsel Model

Ödev: Topları şekildeki gibi gerçekteki hallerine göre sabitleyin ve nasıl hareket ettiklerini anlatın.

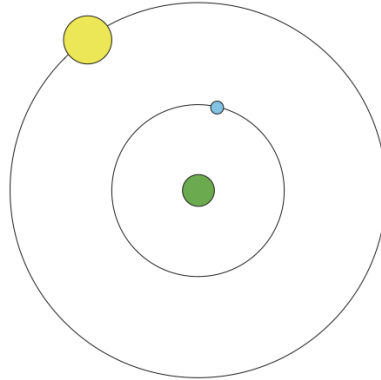


Güneş, Dünya ve Ay'ın göreceli 2 ana hareketi:

- Dünya Güneş'in etrafında dönüyor.
- Ay Dünya'nın etrafında dönüyor.

Güneş'i merkeze, Dünya'yı biraz uzağına, Ay'ı da Dünya'ya yakın bir yere koyabilirsiniz. Ölçüler ve mesafeler ölçeğe uygun olmasa da, kaba tahminler yeterli olacak.

Diğer bir seçenek de, Dünya'yı merkeze koyup, Güneş ve Ay'ı hareket ettirmek. Bu da geçerli bir model ve önemli bir konuya parmak basıyor: "merkez" referansa bağlıdır (evrenin mutlak bir merkezi yoktur).



İlki Heliosentrik (Helios = Güneş) model, ikincisi de Geosentrik (Geo = Dünya) modeldir. Eşdeğer olsalar da, anlamak ve hesaplamak için tek bir bakış açısı daha uygundur. Matematikçiler çalışmalarını bu anlayışla yaparlar.

Haliyle her konfigürasyon geçerli olamaz, mesela Güneş'i Dünya ve Ay'ın arasına koyamayız.

Kuzey Kutbu'nu yukarıya doğru düşünürsek, Dünya Güneş'in (ya da Güneş Dünya'nın) etrafında saat yönünün tersine hareket eder. Ay da Dünya'nın etrafında saat yönünün tersine hareket eder. Ayrıca Dünya kendi ekseninin etrafında saat yönünün tersine hareket eder. Bu arada, bu üç cismi de aynı düzleme yerleştirdiğimizi ve bunun da gerçekte böyle olmadığını unutmayalım.

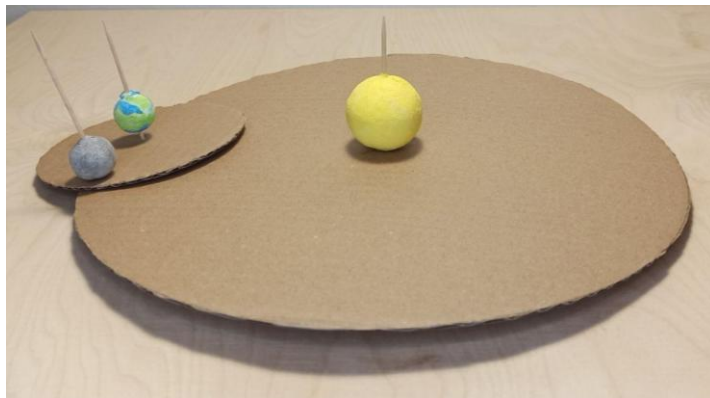
2. Ayın evreleri ve tutulmalar.

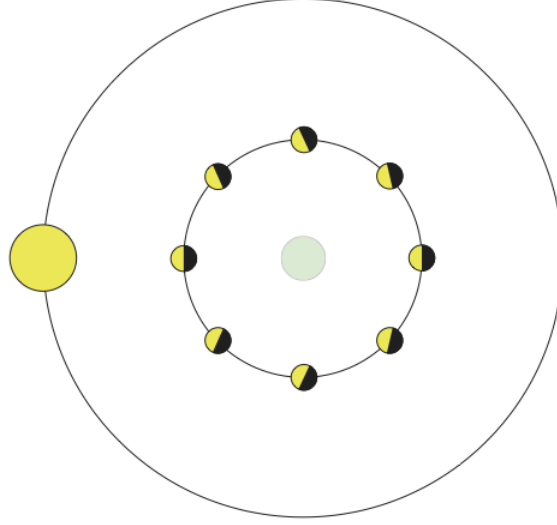
Ödev: Aşağıdaki astronomik olayların tanımını yazın ve düzleminizdeki toplarla birlikte bir model oluşturun:

- Yeni Ay
- İlk dördün
- Dolunay
- Son dördün
- Güneş tutulması (tam veya kısmi)
- Ay tutulması (tam veya kısmi)

Tartışma: Şöyle bir cevap verebiliriz:

- Güneş Ay'ın ancak yarısını aydınlatabilir. Ay'ın evreleri, Ay'ın aydınlatılan yarısının yalnızca bir kısmının Dünya'ya dönük olması sebebiyle oluşur.
- Tutulmalar, bu üç cismin bir şekilde aynı hizaya gelip birbirini gizlediğinde olur.

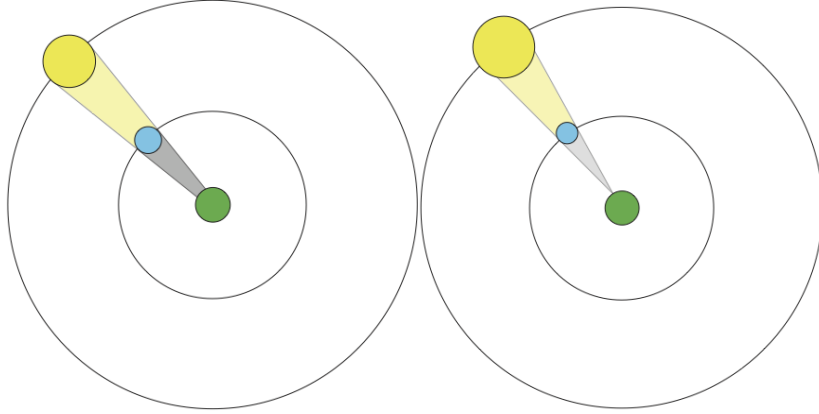




Ay'ın Evreleri

Aradığımız cevaplar şunlar:

- Yeni Ay (kavuşum)*. Ay, Dünya ile Güneş'in arasında (ama aynı hizada değil). Ay'ın aydınlanan tarafı bize uzak ve Güneş'in aydınlatmadığı (gölgede olan) tarafa bakıyoruz. Dünyanın gündüz olan yerlerinde Ay gökyüzünde olduğu halde, aydınlanmadığı için gözükmez. Gece olan yerlerinde ise, ufkun arkasında gizlidir ve gözükmez.
- İlk dördün*. Güneş, Dünya ve Ay'ın oluşturduğu üçgen, Dünya'da dik açılı olduğunu kabul edebiliriz. Ay, gün batımından önce ve sonra gözükür.
- Dolunay (karşıtlık)*. Dünya, Güneş ve Ay arasında (aynı hizada olmadan). Gece boyunca, Güneş'in aydınlattığı dolunay yarımküresini görebiliriz.
- Son dördün*. Güneş, Dünya ve Ay'ın oluşturduğu üçgen, Dünya'da dik açılı olduğunu kabul edebiliriz. Ay, gün doğumundan önce ve sonra gözükür.
- Güneş tutulması* (tam, halkalı veya kısmi). Dünya Ay'ın gölgesinde olduğundan Güneş bir süreliğine Ay'ın arkasında kaybolur.
- Ay tutulması* (tam veya kısmi). Ay Dünya'nın gölgesinde olduğundan, Ay bir süre gizlenir.

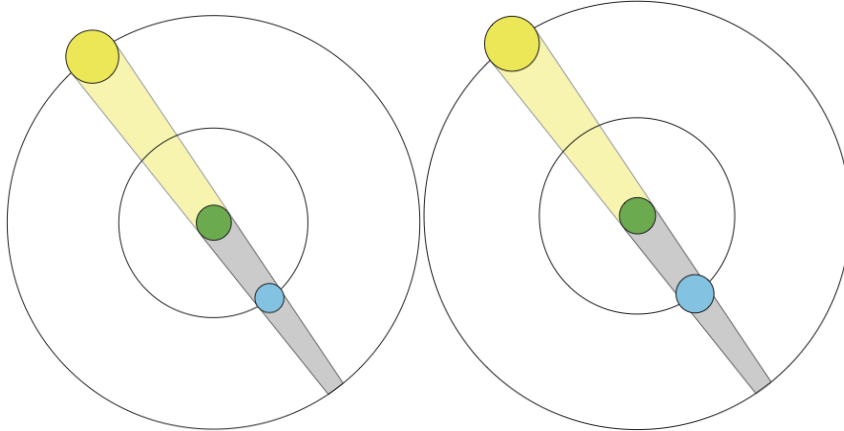


Tam güneş tutulması ve halkalı güneş tutulması

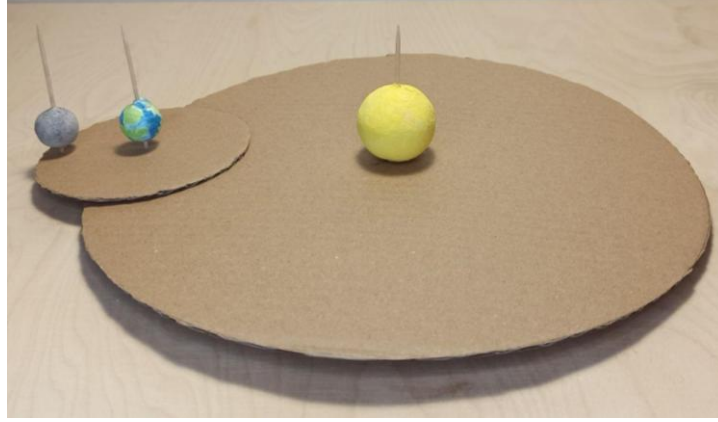


Halkalı güneş tutulması fotoğrafı

Kaynak: Dpickd1 via Wikimedia Commons, CC-BY 4.0 ,



Tam ay tutulması (olur) ve Halkalı ay tutulması (olmaz)



3. Rotasyon zamanları

Her cismin bir dönüşü tamamlaması ne kadar sürer?

Ölçümle ilk cevap şöyle olur:

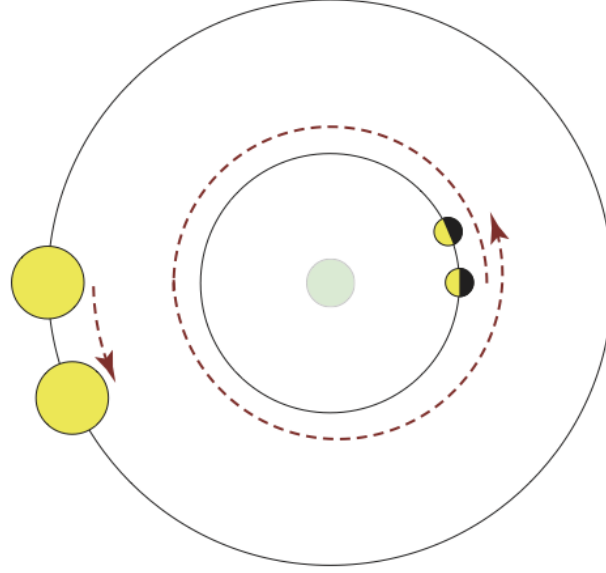
- Dünya'nın kendi eksenini etrafında dönüş süresi bir gündür;
- Dünya'nın Güneş'in etrafında dönüş süresi bir yıldır (365.25 gün civarı);
- Ay'ın Dünya'nın etrafında dönüş süresi yaklaşık bir aydır.

Ay konusunda daha kesin olmaya çalışalım. Merkezi Dünya seçeceğimiz (geosentrik model) çünkü o zaman bütün hareketler dairesel oluyor (halbuki güneş merkezli modelde Ay'ın yörüngesi çok daha karmaşık).

Alıştırma: Bu üç cisim aynı hizadayken, bir daha aynı hizada ne zaman olacaklar? Bunu hesaplamak için Ay ve Güneş'in aynı yönde döndüğünü ve de Ay'ın Dünya'nın etrafında 27.32 günde, Güneş'in de 365.25 günde (sabitlenmiş yıldızlara göre) döndüğünü kabul edin.

Çözüm:

Ay, t günde $360 \cdot t / 27.32^\circ$ bir açı kat eder, Güneş ise $360 \cdot t / 365.25^\circ$. Hizada başlayan bu üç cismin tekrar hizalanması için, Güneş dönüşünün küçük bir kısmını kat ettiğinde, Ay'ın tam bir dönüş artı aynı oranda bir dönüş kat etmiş olması gerekir.



Hizalanmalar arasındaki sürenin hesaplanması

Yani, denkleminiz aşağıdaki gibidir

$$360 \frac{t}{27.32} = 360 + 360 \frac{t}{365.25}$$

çözüm de $t = 29.53$ gündür.

Tek dönüşün ne demek olduğunu tanımlamak için bir referans çerçevesi sabitlemek gerekir. Dolayısıyla çeşitli tanımlarımız var:

- Bir referans yıldız göre Ay'ın aynı yöne tekrar gelmesi için geçen süreye *yıldız ayı* diyoruz ve bu süre 27.32 gün. (Bu aynı zamanda Ay'ın Dünya eksenini içeren dikey düzlemde Dünya tarafına iki geçiş arasındaki süre.)
- Bir *sinodik ay* 29.53 gün ve Ay'ın Güneş yönünde olmasından tekrar aynı yöne dönmesine kadar geçen süre.

Bir sinodik ay iki dolunay arasında geçen süre. Bu sürede Ay tüm evrelerinden geçer. Dünya'nın kendi etrafında dönmesinin de bunu gerçekleştirdiğini unutmayalım.

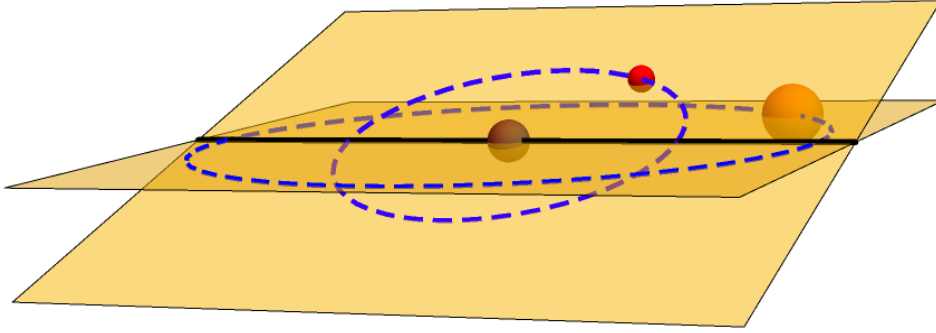
- Bir *yıldız günü* 0.9972 gündür (23 saat 56 dakika 4.0905 saniye), ve gökyüzünün Dünya etrafından bir tur yapıyormuş gibi gözüktüğü süredir. (Dünya yıldızlara göre aynı doğrultuda.)
- Bir *gün* Güneş'in Dünya etrafından bir tur yapıyormuş gibi gözüktüğü süredir (Dünya Güneş'e göre aynı doğrultuda).
- Güneş'in zirvede (en yüksek noktada) olduğu iki an arasındaki süredir.

4. Ay yörünge düzleminin eğimi

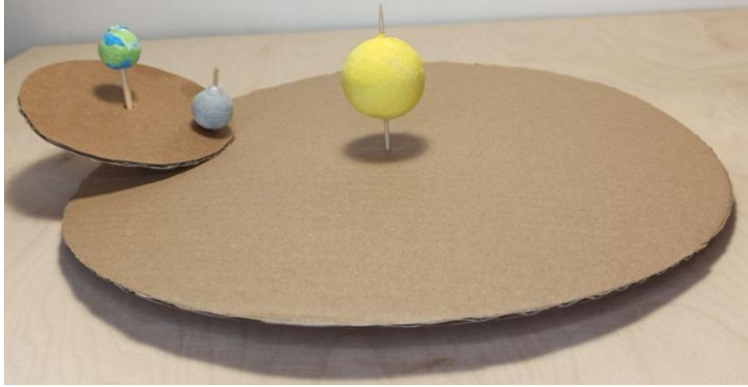
Bu mevcut modellerle her ay güneş ve ay tutulması yaşanır gibi gözükse de, gerçek öyle değil. Neden her ay tutulma olmuyor?

Ay'ın Dünya etrafındaki yörünge düzlemi, Dünya'nın Güneş etrafındaki yörünge düzlemi (ekliptik ya da tutulum düzlemi) ile aynı değil.

Gerçekte, iki düzlem yaklaşık 5° 'lik bir açı yapar. Bu açığı modeli yaparken abartabiliriz, zaten göreceli olarak boylar ve mesafeler gerçekteki gibi değil.



Ödev: Ay yörünge düzleminin eğimini kaale alarak güneş merkezli bir model çizin. Tanımları bu yeni modelde gözden geçirin.



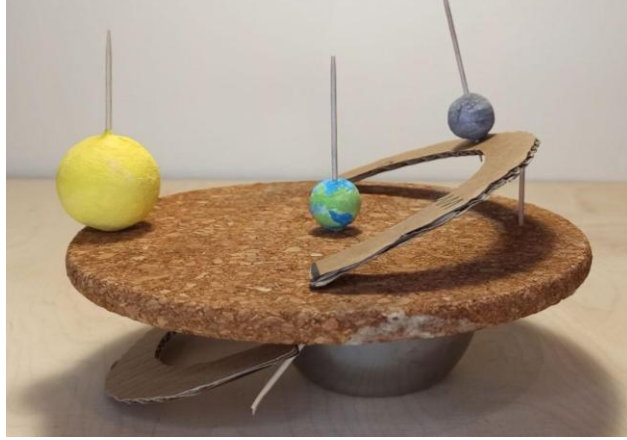
Şu uygulamaya da bakabilirsiniz: [Moon Phases and Eclipses](#).

Ekliptik düzlem ile ay yörünge düzlemi "Düğüm çizgisi" adı verilen çizgide kesişir. Üç cismin hizalanması ancak bu çizgide olabilir. Güneş bir senede yaklaşık iki kez Düğüm

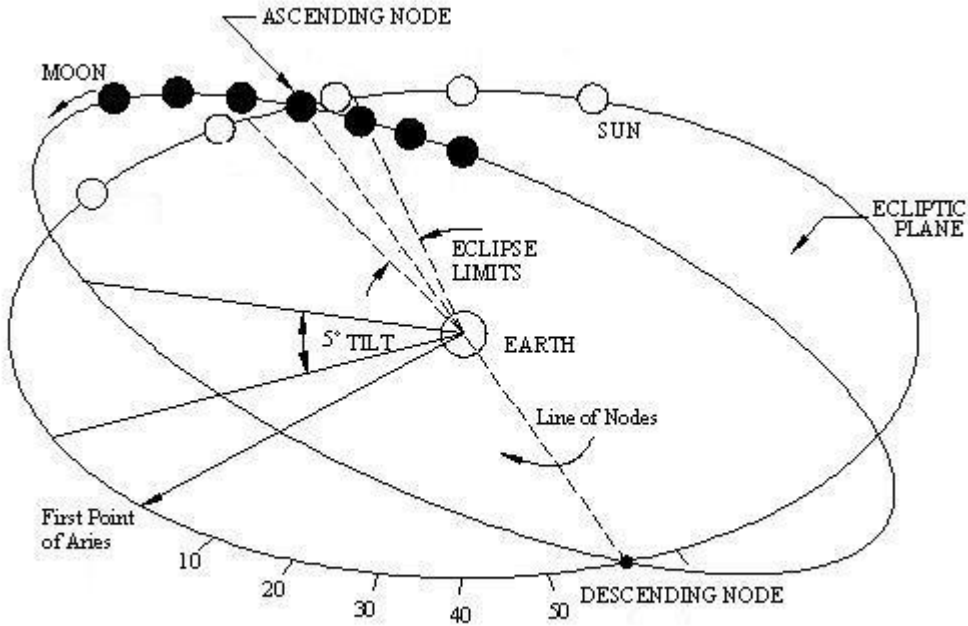
çizgisi üzerindedir (tutulmalar için bir senede iki mevsim). Ancak tutulmalar daha nadirdir çünkü Ay düğüm çizgisini her geçtiğinde Güneş illa o çizgide değildir.

Not: Modelimizde olmayan bir detay: düğüm çizgisi yavaşça değişmekte (düğüm devinimi), dolayısıyla tutulma mevsimleri yılın mevsimleriyle birlikte gitmiyor.

Ödev. Ay yörünge düzleminin eğimini dikkate alarak, yermerkezli (geosentrik) bir model oluşturun.



Bu model güneş merkezli modele eşdeğer olsa da, daha kolay bilgi ve hesaplama sağlıyor. Dünya'yı düzlemin ortasına yerleştirin. Böylece, Güneş, Ay ve tüm yıldızlar Dünya merkezli bir kürede gibi gözüküyorlar: *gökyüzü kubbesi (gökküre)*.



Geosentrik model. Kaynak:

<https://www.csun.edu/~boregan/astrolab/manual/unit050r.htm>

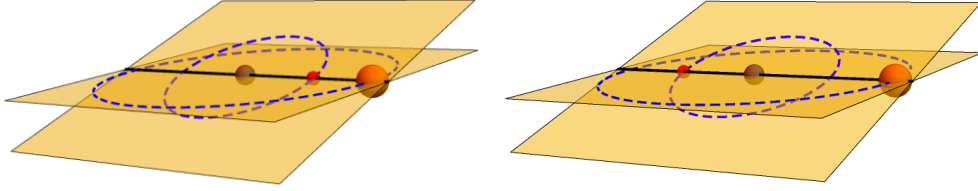
Güneş'in görünen yolu Ekliptik. Modelimizde, Ekliptik düzlemi yatay yapmak uygun olacak. Ekliptik yolun başlangıcını mart ayında Güneş'in baharın ilk günündeki konumu olarak sabitleyebiliriz; bu noktaya *Koç'un ilk notası (Koç'un Boynuzu)* denir. Bu noktadan Ekliptik boyunca oluşan açıya *Ekliptik Boylam* diyoruz. Güneş'in Ekliptik Boylamı günde 1 derece kadar artar ve Dünya'nın etrafında yaptığı 360 derecelik dönüş 365.25 günde tamamlanır.

Ay, Dünya'nın etrafında Ekliptik'e göre 5.14° eğik bir düzlemde döner ve dönüşün tamamlanması bir yıldız ayı (27.32 gün) sürer. Ay yörünge düzlemi, Ekliptik düzlemi Düğüm Çizgisi'nde keser.

Alıştırma: Ay'ın evrelerini ve tutulmalarını tekrar tanımlayın.

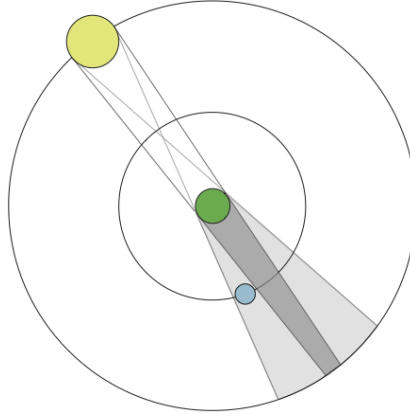
İki düzlem arasındaki açı çok küçük olduğundan, Ay'ı Ekliptik düzleme yansıtmanın ve Ekliptik Boylam boyunca nasıl hareket ettiğini ölçmenin mantıklı olduğunu görüyoruz.

Güneş ve Ay aynı Ekliptik Boylamda olduğunda Yeni Ay oluyor. Bir sinodik ay (29.53 gün) ardından, Güneş ve Ay tekrar aynı Ekliptik Boylamda olurlar. Boyamların farkı 180° olduğunda, Dolunay, and 90° olduğunda ise, ilk veya son Dördün olur. Yeni Ay, Düğüm çizgisinde olduğunda Güneş tutulması, Dolunay Düğüm çizgisinde olduğunda ise Ay tutulması meydana gelir. Cisimlerin genişliğinden dolayı, Düğüm çizgisi etrafında tutulmanın oluşabileceği kenarlar (18.5° civarı) vardır.



Güneş ve Ay tutulmaları

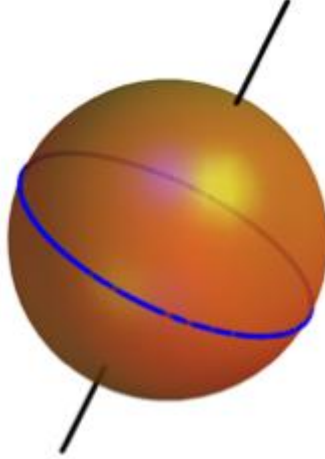
Güneş ışığının Dünya'ya ulaşması, hiçbir Güneş ışığının nüfuz etmediği bir gölge (umbra bölgesi) ve ışığın kısmen nüfuz ettiği yarı gölge (penumbra bölgesi) oluşturur. Ay umbradan geçmeden penumbradan geçebilir. Böyle bir durumda yarı gölgeli ay tutulmasından bahis ederiz. Tutulma tam veya kısmi olarak gerçekleşebilir.



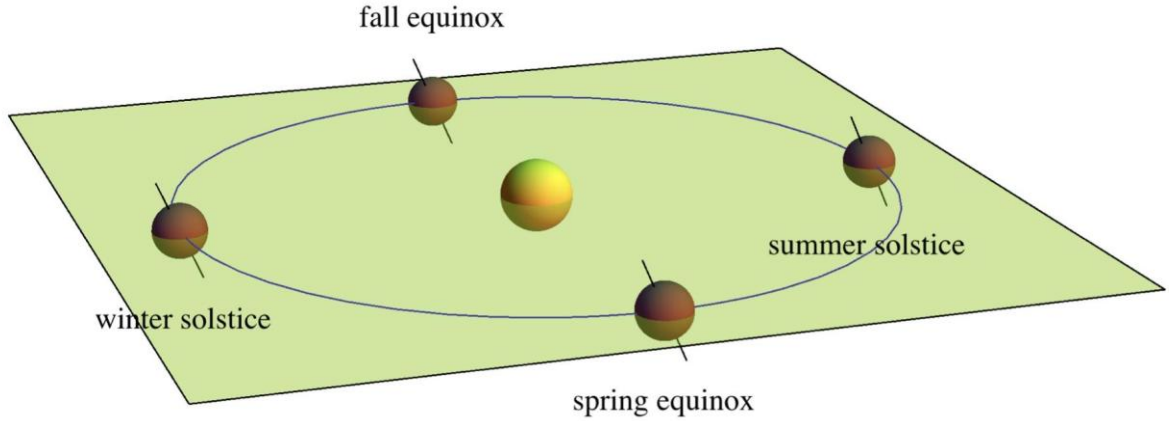
Yarı gölgeli tam ay tutulması

5. Extra etkinlik: Mevsimler.

Dünya ekseninin eğikliğini kaale alan bir modelde çalışalım.



Eksen ile Ekliptik düzlem arasında sabit bir açı vardır ve bu açı sayesinde mevsimler oluşur.



Soru: (sorunun cevabı bulunduğunuz yarıküreye göre değişir) Yaz, sonbahar ve kış mevsimlerinin ilk günü ne zaman? Neden mevsimler (soğuk ve sıcak) Dünya Ekseninin eğimi (23.44°) yüzünden oluşur? Buradan eğimin hangi yönde olduğunu anlayabilirsiniz.

Cevap:

Koç Noktası 0° ise, yaz, sonbahar ve kış (Kuzey yarıkürede) sırasıyla 90 , 180° ve 270° 'de bulunur. Güney yarıkürede, Koç Noktası sonbaharın ilk günüdür ve diğer açılar sırasıyla kış, ilkbahar ve yaza karşılık gelir.

Eğer modelinizde Kuzey kutbu yukarıdaysa, yazın ilk gününde Güneş'e doğru 23.44° eğik olması gerekir. Güney kutbunu yukarıda tercih etmişseniz, eğimin Güneş'in tersi yönünde olması gerekir.

Dünya'nın belirli bir yerinde, mesela bulunduğunuz yerde, Güneş'in Dünya'ya ulaştığı yaz ve kış farklı açılara bakın, Kutuplardaki en uzun gün ve geceleri karşılaştırın.

Not: Koç Noktası, tanım gereği, Ekliptik düzlem ile Dünya'nın ekvator düzleminin kesiştiği noktadır. Bu çizgi yıldızlara göre sabit değildir, çünkü Dünya ekseninin eğimi son derece yavaş da olsa (yaklaşık 26.000 yılda bir tur) değişir (ekinoksların devinimi). Ancak eskilerin bu noktayı Koç takımyıldızının ucu olarak adlandırmaları üzerinden yeterince vakit geçti ve bugün bu nokta aslında Balık takımyıldızında.

Ayrıca, bu devinim, Dünya'nın yıldızlara göre yörünge periyodunun (*yıldız yılı*, 365.256363004 gün), Güneş'e göre aynı yörüngeden (*tropikal yıl*, 365.24219 gün) yaklaşık 20 dakika daha uzun olduğu anlamına gelir. Tropikal yıl takvimin temeli olan olağan yıldır.

6. Extra malzeme: Başka aylar ve tutulmaların sıklığı.

Hem Ay hem de aylar ile ilgili epeyce kavram var (lunar month):

- Yıldız ayı (Sidereal month): Ay'ın sabit yıldızlara göre yaptığı bir dönüş. 27.321661 gün sürer.
- Sinodik ay (Synodic month): Yunanca Synodos (toplantı) kelimesinden gelir. Ay'ın bir ekliptik boylamdan tekrar aynı boylama gelme süresidir. Bu sürede Ay'ın tüm evreleri oluşur. 29.53059 gün sürer.
- Drakonik ay (Draconic month): (iki düğümde yaşayıp, tutumalar sırasında Güneş'i veya Ay'ı yediği söylenen dragon): Ay'ın bir düğümden diğerine gitme süresidir. Yıldız ayından biraz farklıdır. 27.212220 gün sürer.
- Anormal Ay (Anomalistic month): Ay daire şeklinde değil, elips üzerinde hareket eder. Ay, Dünya'ya yakınken biraz daha büyük, uzaktayken de biraz daha küçük gözüktür. Bu yüzden güneş tutulması bazen tam (Ay Güneş'i tamamen kapatır) bazen de halkalı (Ay Güneş'le neredeyse eşmerkezli bir daire çizerek görünürde bir ışık halkası bırakır). Elipsin ekseni de dönmektedir. Ay'ın yörüngedeki en yakın nokta olan yerberi noktasından tekrar o noktaya gelme süresi bir anormal aydır. 27.554551 gün sürer.

Eski Babilliler ve Yunanlılar oldukça gelişmiş bir gökyüzü modeline sahiptiler. Saros adını verdikleri döngünün temeli gözlemsel tesadüfler.

Bir Saros aşağıdakiler değerinde:

- 223 sinodik ay (tanım)
- 242 drakonik ay (yaklaşık)
- 239 anormal ay (yaklaşık)
- 6,585.321347 gün
- 18.029 yıl (18 yıl 11 gün 8 saat)

Tutulma ardından bir Saros döngüsü tamamlandığında Ay aynı fazdadır (belli bir tamsayıda sinodik ay), ekliptikten tekrar geçer (belli bir tamsayıda drakonik ay) ve görünen büyüklüğü aynıdır (belli bir tamsayıda anormal ay). Dolayısıyla neredeyse aynı tutulma meydana gelir. Yunanlılar, 18 yıl boyunca kayıt alarak, bir Saros döngüsündeki tüm tutulmaları içeren açıklamalı tablolar ürettiler. Bu tablolar sayesinde yüzyıllar boyunca tutulmaları ve türlerini tahmin etmek mümkün oldu.

Bir Saros tamsayı gün sayısını üçte bir oranında (yaklaşık 8 saat) aştığı için, bir Saros ardından Dünya üçte bir dönmüş olur, dolayısıyla da tutulma Dünya'da bulunan yerden 8 saat farkla görülecektir (yani 120° boylamla kaydırılmış bir bölgede). Her üç Saros'ta (54 sene 34 gün), hemen hemen aynı tutulma aynı yerden aynı saatte görülebilir.

Sayıların herşeyi yönettiği bir antik yunan idealiydi, Saros ve günleri ayları sayan tam sayılar bu ideal ile uyumluydu. Sayılar onlar için tam sayılar ve bu sayıların oranlarını oluşturan kesirler idi. Aslında irrasyonel sayıları farkında idiler ama bu felsefelerinde ciddi krizlere yol açıyordu ve göklerin rasyonel sayılarla yönetildiğini düşünmek çok daha güzeldi.

7. Sonuçlar

Bu etkinlikte çeşitli modeller oluşturduk. Matematiksel anlamda bir model, bir sistemi keşfetmemize ve anlamamıza olanak tanıyan gerçeğin basitleştirilmiş bir temsildir.

İlk modelimizde üç cisim de aynı düzlemde hareket ediyordu. Bu modeli, Ay'ın yörüngesini Güneş'inkinden farklı bir düzlemde yaparak geliştirdik. Sonra da, Dünya ekseninin eğik olmasına yer verdik ve modeli daha da doğru hale getirmek için dikkate alınabilecek birkaç detaydan bahis ettik.

Her model, doğadan yapılan gözlemlere dayanır ve “sanki” doğa bu modeli takip ediyormuş gibi yapılır. Üçüncü bölümde yıldız ayından hareketle sinodik ayı hesapladık. Aslında her ikisini de doğrudan doğada ölçebiliriz. Yıldız ayını, Ay’ın yıldızlara göre konumunu gözlemleyerek ölçeriz, sinodik ayı da Ay’ın evrelerini (yani Güneş’e göre konumunu) gözlemleyerek ölçeriz. Bu gözlemler hesapla bulduğumuz değerle eşleşiyor mu? Evet!! Ay Dünya’nın etrafında bir daire içinde belirli bir sabit hızla dönüyormuş gibi davrandığından, modelimiz doğrulanıyor. Ama ve lakin...yeterli doğrulukta ölçüm yaptığımızda, hesaplarımızla eşleşme olmuyor! Bu da modelin eksik olduğunu ortaya koyuyor. O zaman biraz daha ince çalışma yapıp, yörüngenin aslında bir daire değil bir elips olduğunu ve hızın da tam olarak sabit olmadığını, elipsin Dünya’ya daha yakın kısmında hızlanma olduğunu eklemeliyiz. Newton yasaları, gök cisimleri arasındaki yörüngeleri ve kuvvetleri tanımlayan gelişmiş bir gökyüzü modeli sağlıyor. Ancak Newton yasaları da tüm astronomik olayları açıklayamıyor ve bir aşamada Einstein’ın görecelilik teorisini kullanmamız gerekiyor. Böyle devam ediyor ve hala iyi model bekleyen fenomenler var. Bütün bunlar, daha basit modellerin yanlış veya işe yaramaz olduğu anlamına gelmez. İyi bir genel bakış, iç görü ve gerçekliğe dair tahminler yapmamızı sağlarlar. Daha rafine modeller gerçeğe daha yakın olurlar ve daha derin içgörüler edinmemize yararlar.

Kaynaklar

- Ay’ın evreleri ve tutulmalar app: <https://imaginary.github.io/moonphaseseclipses>

Yarat ve Paylaş!

Katılımcıların bulgularını **#idm314eclipses** ve **#idm314** etiketlerini kullanarak paylaş!

© 2024 Christiane Rousseau, Daniel Ramos

Çalışmanın lisansı: [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).