



A Matemática dos eclipses

Um eclipse lunar ocorrerá em [13-14 de março de 2025](#), precisamente no DIM 2025. Este será um eclipse lunar total visível numa grande parte da América. Seis meses depois, em [7-8 de setembro de 2025](#), ocorrerá um eclipse lunar semelhante, totalmente visível na maior parte da Ásia, África Oriental e Austrália. Esta pode ser uma boa oportunidade para discutir a Matemática dos eclipses.

Participantes:

Idade 13 anos ou mais

Não são necessários conhecimentos prévios de Matemática, mas os participantes devem ter uma compreensão básica dos movimentos da Terra e da Lua.

Atividade:

Construção de um modelo físico do Sol, da Terra e da Lua.

Discussão sobre a Matemática por trás do fenómeno dos eclipses.

Materiais:

- Três bolas feitas de algodão comprimido, esferovite, madeira, etc. As bolas devem ter um orifício de passagem. É preferível utilizar três tamanhos diferentes.
- Palitos de madeira que possam ser espetados nas bolas.
- Aguarela ou outro tipo de tinta que seja adequado para colorir as bolas.
- Superfície de cortiça ou cartão para fixar os palitos.

Preparativos:

- Pintar uma bola grande de amarelo (o Sol), uma bola média de verde e azul (a Terra) e uma bola pequena de cinzento (a Lua).

1. Modelo planar

Tarefa: Fixe as três bolas à cortiça e descreva o seu movimento.

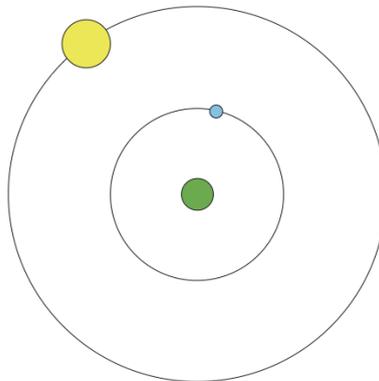


Os dois principais movimentos relativos do Sol, da Terra e da Lua são:

- A Terra roda em torno do Sol.
- A Lua roda em torno da Terra.

Pode colocar o Sol no centro, a Terra a uma certa distância e a Lua perto da Terra. Os tamanhos e as distâncias não serão certamente à escala.

Outra opção é colocar a Terra no centro, com o Sol e a Lua a moverem-se à sua volta. Este é também um modelo válido. E ilustra uma ideia muito importante: o “centro” é apenas uma questão da referência que se toma (não existe um centro absoluto do Universo).



O primeiro caso é um modelo Heliocêntrico (Helios = Sol) e o segundo é um modelo Geocêntrico (Geo = Terra). Ambos os pontos de vista são equivalentes, mas por vezes um ponto de vista é melhor para a compreensão do fenómeno ou para a realização de cálculos. Os matemáticos recorrem a mudanças do ponto de vista para estes fins.

Nem todas as configurações são válidas, por exemplo, colocar o Sol entre a Terra e a Lua é incorreto.

No modelo heliocêntrico, supondo que o pólo norte da Terra está virado para cima, a Terra deve mover-se no sentido anti-horário em torno do Sol. A Lua também se deve mover no sentido anti-horário à volta da Terra. A Terra também roda sobre o seu eixo no sentido anti-horário. Repare que estamos a colocar todos os corpos no mesmo plano, o que não acontece na realidade.

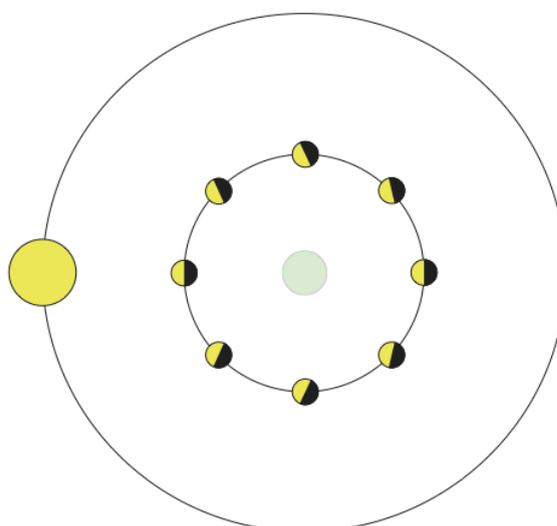
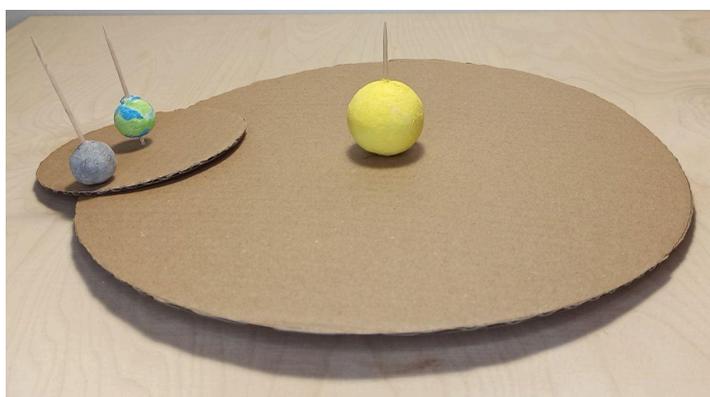
2. Fases da lua e eclipses.

Tarefa: Escreva uma definição dos seguintes acontecimentos astronómicos e construa um modelo com as bolas colocadas na base de cortiça:

- Lua nova
- Quarto crescente
- Lua cheia
- Quarto minguante
- Eclipse solar (total ou parcial)
- Eclipse lunar (total ou parcial)

Discussão: Uma resposta básica seria:

- O Sol só consegue iluminar metade da Lua. As fases da Lua acontecem porque apenas parte da metade iluminada da Lua está virada para a Terra.
- Os eclipses acontecem quando os três corpos celestes estão de alguma forma alinhados e um esconde um outro.

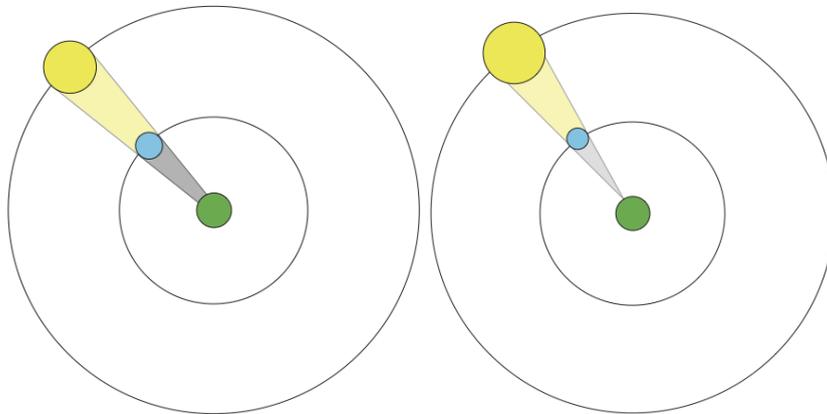


Fases da Lua

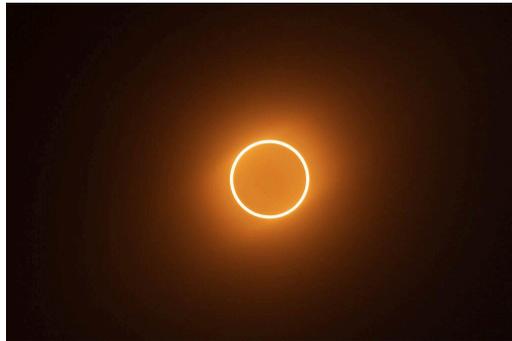
As respostas que procuramos são:

- Lua Nova.* A Lua está entre a Terra e o Sol (mas não alinhados). O lado da Lua que está iluminada está de costas para nós e nós estamos virados para o lado que não está iluminado pelo Sol (está na sombra). Na parte da Terra onde é dia, a Lua está

- no céu mas não está visível (dado não estar iluminada), da parte da Terra onde é noite, a Lua não está no céu (está escondida atrás do horizonte).
- b. *Quarto crescente*. O Sol, a Terra e a Lua formam um triângulo aproximadamente retângulo na Terra. A Lua é visível antes e depois do pôr do sol.
 - c. *Lua Cheia*. A Terra encontra-se entre o Sol e a Lua (mas não alinhada). Podemos ver durante a maior parte da noite quase todo o hemisfério da Lua que está a ser iluminado pelo Sol.
 - d. *Quarto minguante*. O Sol, a Terra e a Lua formam um triângulo aproximadamente retângulo na Terra. A Lua é visível antes e depois do nascer do Sol.
 - e. *Eclipse solar (total, anelar ou parcial)*. A Terra está na sombra projetada pela Lua, pelo que o Sol desaparece momentaneamente atrás da Lua.
 - f. *Eclipse lunar (total ou parcial)*. A Lua está na sombra projetada pela Terra, pelo que a Lua fica momentaneamente obscurecida.

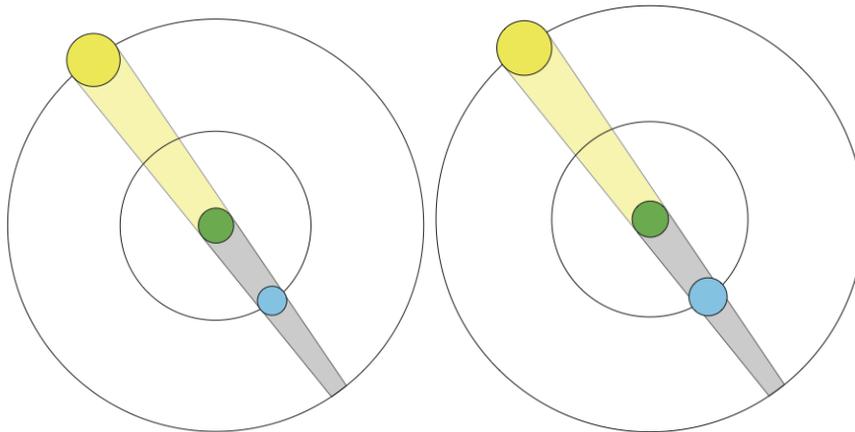


Um eclipse solar total e um eclipse solar anelar

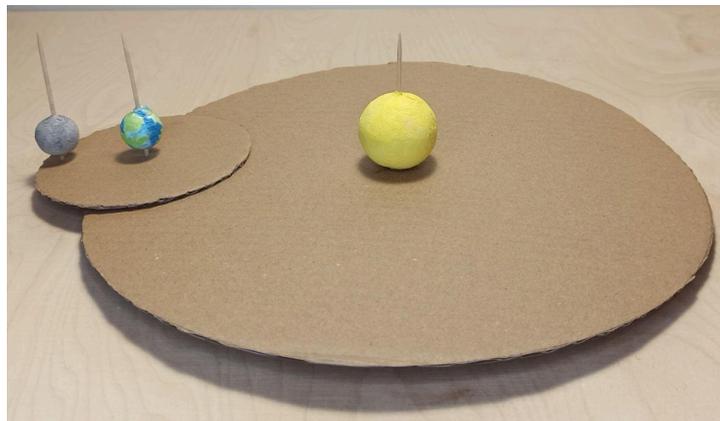


Fotografia de um eclipse solar anelar

Fonte: Dpickd1 via Wikimedia Commons, CC-BY 4.0 ,



Eclipse lunar total (ocorre) e Eclipse lunar anelar (nunca ocorre)



3. Períodos de rotação

Quanto tempo leva cada corpo a completar uma volta?

Uma primeira resposta seria:

- O período de rotação da Terra em torno do seu eixo é de um dia;
- O período de rotação da Terra em torno do Sol é de um ano (cerca de 365,25 dias)
- O período de rotação da Lua em torno da Terra é cerca de um mês (talvez acrescentar: e esse é também quanto a Lua leva a passar por todas as suas fases)

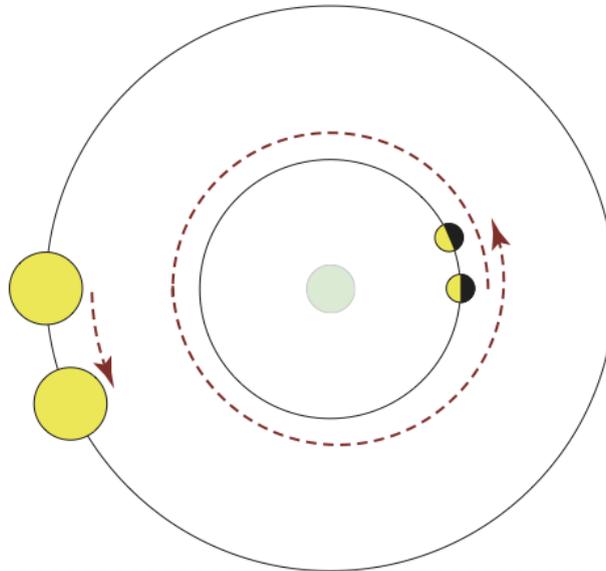
Vamos tentar ser mais precisos no que diz respeito à Lua. Vamos fixar a origem na Terra (modelo geocêntrico) porque assim todos os movimentos são circulares (no modelo heliocêntrico, a Lua faz uma trajetória muito mais complicada).

Exercício: Suponha que a Lua roda à volta da Terra em 27,32 dias e o Sol (em relação às estrelas fixas) em 365,25 dias e que ambos rodam na mesma direção. Suponha que nalgum momento os três corpos se encontram alinhados. Calcule quando é que eles voltarão a estar alinhados novamente.

Solução:

Em t dias, a Lua percorre um ângulo de $360 t/27,32^\circ$ e o Sol percorre um ângulo de $360 t/365,25^\circ$. Suponha que começamos com os três corpos alinhados. Então, o próximo

alinhamento na mesma ordem ocorre quando o Sol tiver percorrido uma fração de uma volta e a Lua uma volta completa mais a mesma fração de volta.



Calculando o período entre alinhamentos

Isso significa que tal sucede quando t satisfaz a equação

$$360 \frac{t}{27.32} = 360 + 360 \frac{t}{365.25}$$

cuja solução é $t = 29,53$ dias.

Note que para definir o que é “uma volta”, é preciso fixar um referencial. Assim, temos definições diferentes:

- Um *mês sideral* é de 27,32 dias e trata-se do tempo que a Lua leva a partir do momento em que está na direção de qualquer estrela de referência até se encontrar na mesma direção novamente (É também o tempo que a Lua leva entre duas passagens no plano vertical que contém o eixo inclinado da Terra, do mesmo lado da Terra.)
- Um *mês sinódico* é de 29,53 dias e trata-se do tempo que a Lua leva a partir do momento em que está na direção do Sol até estar outra vez na direção do Sol.

Um mês sinódico é o período entre duas luas cheias. Durante este tempo, a Lua passa por todas as suas fases.

Algo análogo sucede com a rotação da Terra em torno de si mesma.

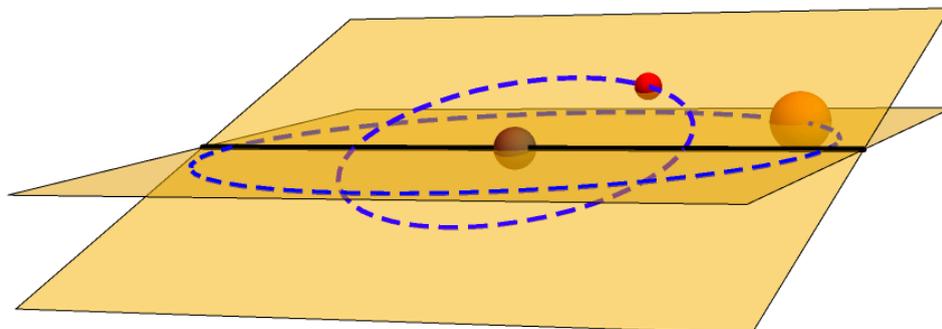
- Um *dia sideral* equivale a 0,9972 dias (23 h 56 min 4,0905 s) e é o tempo no qual o céu parece dar uma volta em torno da Terra (a Terra tem a mesma orientação em relação às estrelas).
- Um dia (solar) é o tempo em que o Sol parece dar uma volta em torno da Terra (a Terra tem a mesma orientação em relação ao Sol). É também o tempo entre dois momentos em que o sol está no seu zénite (o ponto mais alto), o meio-dia solar.

4. Inclinação do plano da órbita lunar

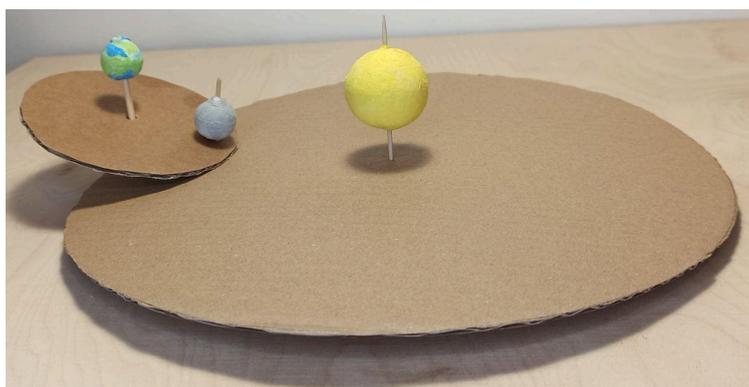
Com este modelo, parece que todos os meses teríamos um eclipse solar e um eclipse lunar. Por que não temos eclipses todos os meses?

O plano orbital da Lua em torno da Terra não é o mesmo que o plano orbital da Terra em torno do Sol (chamado Eclíptica).

Na realidade, os dois planos fazem um ângulo de cerca de 5° . Nota: pode exagerar o ângulo no modelo, já que os tamanhos e distâncias relativos também estão errados.



Tarefa: Construa e desenhe um modelo heliocêntrico tendo em conta a inclinação do plano orbital da Lua e reveja, neste novo modelo, as definições que deu na secção 3.



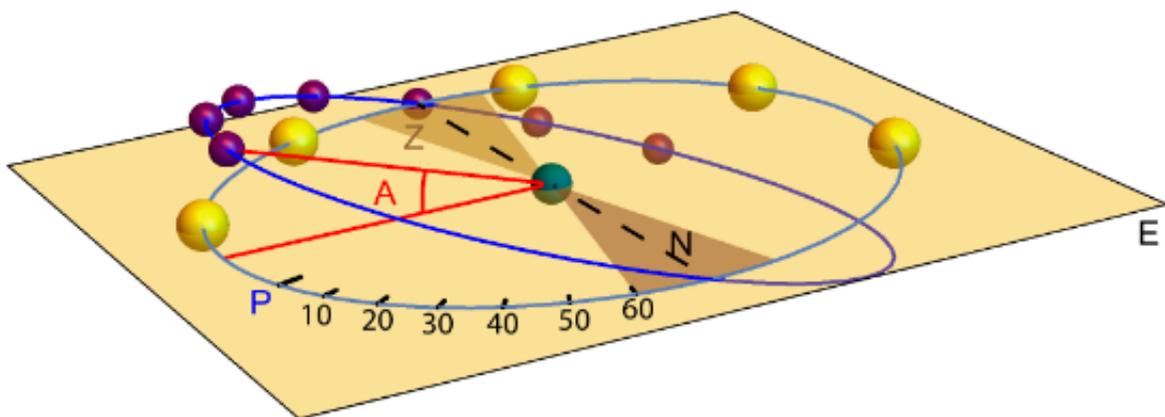
Também pode ver a app interativa "[Moon Phases and Eclipses](#)".

O plano orbital da Lua e a Eclíptica interseitam-se numa reta, chamada *linha dos nodos*. O Sol, a Terra e a Lua só podem estar alinhados nesta reta. O Sol está na linha dos nodos aproximadamente duas vezes por ano (duas épocas para eclipses num ano). No entanto, os eclipses são mais raros porque nem sempre o Sol está na linha dos nodos quando a Lua atravessa essa reta.

Nota: Uma subtilidade que não é incluída no nosso modelo: a linha dos nodos muda lentamente (precessão nodal), de modo que as estações dos eclipses não estão ligadas às estações do ano.

Tarefa. Construa e desenhe um modelo geocêntrico considerando a inclinação do plano orbital da Lua.

Este modelo é equivalente ao modelo heliocêntrico (centrado no Sol), mas fornecerá maior compreensão e cálculos mais fáceis. Coloque a Terra no centro da placa de cortiça. O Sol, a Lua e todas as estrelas estão (aparentemente) numa esfera centrada na Terra, a *Esfera Celeste*.



Modelo geocêntrico: O Sol (a amarelo) move-se no plano da Eclíptica (E), e a Lua (a roxo) move-se no seu plano orbital cujo ângulo de inclinação é de $5,14^\circ$ (A). A linha dos nodos (N) é a intersecção de ambos os planos. Para que ocorra um eclipse, tanto o Sol como a Lua têm de estar numa vizinhança de $18,5^\circ$ da linha dos nodos (a zona Z a castanho). O Primeiro Ponto de Aries (P) marca a origem da longitude eclíptica.

O percurso aparente do Sol é a Eclíptica. É conveniente tornar o plano da Eclíptica horizontal no nosso modelo. Podemos fixar a origem da Eclíptica na posição do Sol no primeiro dia da primavera (no hemisfério Norte) em março; este ponto é chamado Primeiro Ponto de Áries. A longitude da Eclíptica é o ângulo medido a partir do Primeiro Ponto de Áries ao longo da Eclíptica. O Sol aumenta a sua longitude eclíptica aproximadamente 1 grau por dia, demorando 365,25 dias a completar a sua rotação de 360 graus à volta da Terra.

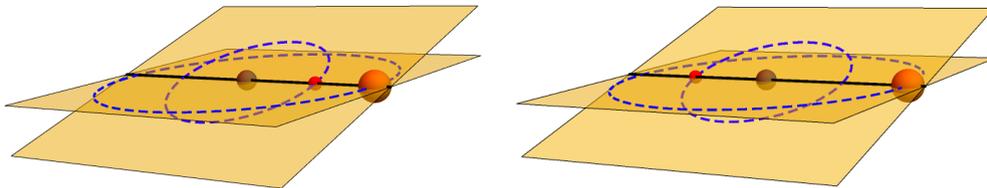
A Lua roda à volta da Terra num plano inclinado de $5,14^\circ$ em relação à Eclíptica e demora um mês sideral (27,32 dias) a dar uma volta. O plano da órbita da Lua cruza a Eclíptica na *linha dos nodos*.

Exercício: Identifique novamente as fases da Lua e os eclipses.

Note que, como o ângulo entre os dois planos é tão pequeno, faz sentido projetar a Lua no plano da Eclíptica e medir como esta se move, através da sua *Longitude Eclíptica*.

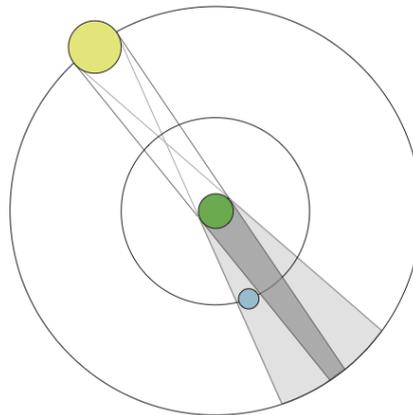
Quando o Sol e a Lua têm a mesma longitude eclíptica, tem-se uma Lua nova. Após um mês sinódico (29,53 dias), o Sol e a Lua voltam a ter a mesma longitude eclíptica. Quando a diferença entre as suas longitudes eclípticas é de 180° , é Lua cheia; e quando a diferença é de 90° , trata-se do quarto crescente ou minguante.

Um eclipse solar corresponde a uma Lua nova na linha dos nodos e um eclipse lunar corresponde a uma Lua cheia na linha dos nodos. Como o Sol e a Lua têm alguma largura, existem algumas margens à volta da linha dos nodos (cerca de $18,5^\circ$) onde pode ocorrer um eclipse.



Eclipses solar e lunar

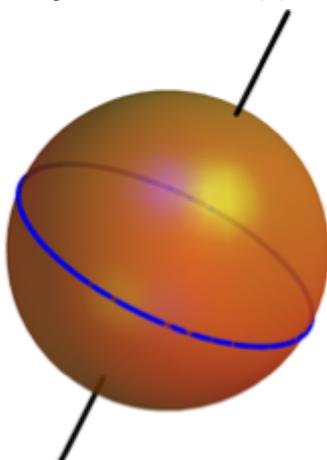
Quando a luz do Sol atinge a Terra, cria-se uma zona de umbra (sombra) onde não penetra a luz do Sol e uma região de penumbra onde penetra parte da luz do Sol. Pode acontecer que a Lua atravesse a penumbra sem cruzar a umbra. Neste caso, falamos de eclipse lunar penumbral. Tal eclipse pode ser total ou parcial.



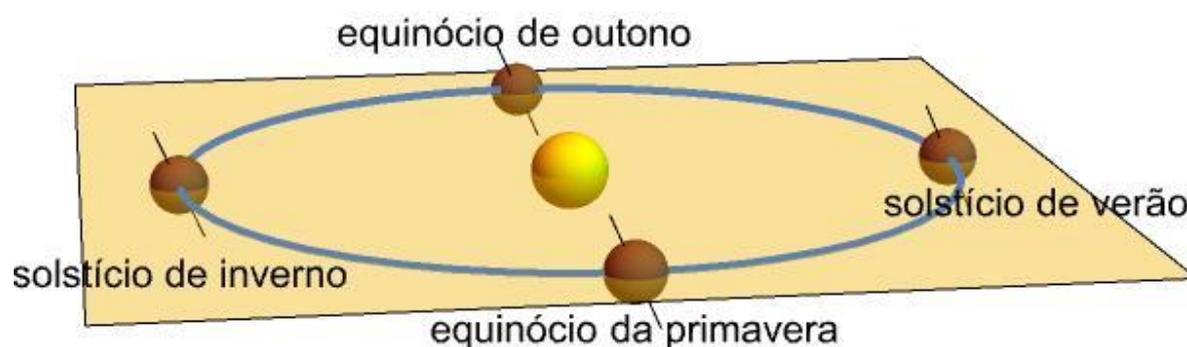
Eclipse lunar total penumbral

5. Atividade extra: As estações do ano.

Introduza a inclinação do eixo de rotação da Terra no(s) seu(s) modelo(s).



O eixo da Terra forma um ângulo fixo com o plano da Eclíptica. Este ângulo é responsável pelo mecanismo das estações.



Questão: Onde ocorrem os primeiros dias do verão, outono e inverno (note que a sua resposta depende do hemisfério onde se encontra)? Discuta por que razão as estações do ano (fria e quente) são causadas pela inclinação do eixo da Terra ($23,44^\circ$). Para cada caso, leve os seus alunos a deduzirem em que direção o eixo da Terra está inclinado.

Resposta:

Seja o *Primeiro ponto de Aries* o ponto da eclíptica onde o sol se encontra no primeiro dia de primavera no hemisfério norte. Trata-se da origem da longitude eclíptica. Assim, o início da primavera está por definição localizado na longitude eclíptica 0° e os inícios do verão, outono e inverno (no hemisfério Norte) estão localizados a 90° , 180° e 270° , respetivamente. No hemisfério sul, o Primeiro ponto de Aries corresponde ao primeiro dia do outono e os pontos seguintes correspondem ao inverno, à primavera e ao verão, respetivamente.

Se o Pólo Norte estiver virado para cima no seu modelo, então, no primeiro dia de verão, ele deverá estar inclinado $23,44^\circ$ em direção ao Sol. Se preferir o Pólo Sul virado para cima, então este deverá estar inclinado na direção oposta ao Sol.

Compare os diferentes ângulos nos quais o Sol atinge a Terra no verão e no inverno num determinado local (por exemplo, na sua localização) e reflita sobre os longos dias e noites nos Pólos.

Nota: O Primeiro Ponto de Áries está, por definição, na interseção do plano da eclíptica com o plano do equador da Terra. Esta linha não é fixa em relação às estrelas porque a inclinação do eixo da Terra muda (a precessão dos equinócios), mas é extremamente lenta, cerca de uma volta em 26.000 anos. No entanto, já passou bastante tempo desde que os Antigos nomearam este ponto como estando na ponta da constelação de Áries (ou Carneiro) e hoje este ponto está, na verdade, na constelação Peixes.

Esta precessão, entre outras coisas, significa que o período da órbita da Terra em relação às estrelas (ano sideral, 365,256363004 dias) é cerca de 20 minutos mais longo do que a mesma órbita em relação ao Sol (ano trópico, 365, 24219 dias). O ano trópico é o ano usual, a base do calendário.

6. Material adicional: outros meses lunares e a frequência de eclipses.

Existem diferentes noções de mês lunar:

- Mês sideral: É o tempo em que a Lua dá uma volta em relação às estrelas fixas. Demora 27,321661 dias.
- Mês sinódico: Do grego Sínodo, reunião. É o tempo que a Lua demora para voltar à mesma longitude da Eclíptica. Trata-se do período das fases da Lua. Dura 29,53059 dias.
- Mês draconiano (do dragão mítico que se dizia viver nos dois nodos e comer o Sol ou a Lua durante os eclipses): É o tempo que a Lua demora a passar de um nodo para o mesmo nodo novamente. É ligeiramente diferente do mês sideral, 27,212220 dias.
- Mês anomalístico: a Lua move-se numa elipse e não numa circunferência. Isto faz com que a Lua pareça um pouco maior quando está mais próxima da Terra e um pouco mais pequena quando está mais longe. Esta é a razão pela qual, por vezes, um eclipse solar é total (a Lua cobre completamente o Sol) e, por vezes, é anelar (a Lua cobre um círculo quase concêntrico com o Sol, deixando um anel de luz visível). O tempo que a Lua demora a ir do seu perigeu (ponto mais próximo da órbita) até ele novamente é um mês anomalístico que dura 27,554551 dias.

Os antigos babilónios e gregos tinham um modelo bastante desenvolvido do céu. Definiram o chamado ciclo de Saros, com base numa coincidência encontrada por observação:

Um ciclo de Saros é

- 223 meses sinódicos (exatamente, por definição)
- 242 meses draconianos (quase exatamente)
- 239 meses anomalísticos (quase exatamente)
- 6.585,321347 dias
- 18,029 anos (18 anos, 11 dias e 8 horas)

Se ocorrer um eclipse, após um ciclo de Saros a Lua estará novamente na mesma fase (um número inteiro de meses sinódicos), cruzando novamente a eclíptica (um número inteiro de meses draconianos) e com o mesmo tamanho aparente (um número inteiro de meses anomalísticos), então ocorrerá um eclipse quase idêntico. Os gregos tinham tabelas com anotações de todos os eclipses num ciclo de Saros (registados em cerca de 18 anos), a partir dos quais podiam extrapolar todos os eclipses e (o seu tipo) durante séculos.

Como um ciclo Saros excede um número inteiro de dias em um terço de dia (cerca de 8 horas), após um ciclo de Saros a Terra rodou mais um terço de volta, o que implica que o eclipse é visível não no local onde fora visível no início do ciclo, mas sim num local com uma longitude diferindo dele por 120° . A cada três ciclos Saros (54 anos e 34 dias), um eclipse quase idêntico pode ser visto no mesmo local, à mesma hora.

Os Ciclos Saros e os números inteiros de dias e meses enquadram-se no ideal grego de que “os números governam tudo” e que os números são apenas naturais ou frações, sendo estes últimos razões entre números naturais. Embora os gregos tenham descoberto os números irracionais, isso representou uma crise profunda na sua filosofia e era-lhes muito mais agradável pensar no céu como sendo regido por estes números especiais.

7. Conclusões

Nesta atividade construímos vários modelos. Um modelo, no sentido matemático, é uma representação simplificada da realidade que nos permite explorar e compreender um sistema.

No primeiro modelo que construímos, os três corpos moviam-se no mesmo plano. Refinámos este modelo, fazendo com que a Lua estivesse num plano diferente do do Sol. Na última parte, incluímos a inclinação axial da Terra e referimos vários refinamentos que podemos considerar para tornar o modelo mais preciso.

Um modelo baseia-se em observações da natureza e propõe um mecanismo “como se” a natureza o seguisse. Na secção 3, calculámos o mês sinódico a partir do mês sideral. No entanto, podemos medir ambos diretamente a partir da natureza: ao observarmos a posição da Lua em relação às estrelas, medimos o mês sideral. Ao observarmos as fases da Lua (ou seja, a sua posição em relação ao Sol), medimos o mês sinódico. Estas observações coincidem com o valor calculado? Se sim, isto valida o modelo, dado que a Lua se comporta *como se* rodasse à volta da Terra numa circunferência, a uma certa velocidade constante. Só que... Na realidade, as observações **não** correspondem aos cálculos se medirmos com precisão suficiente! Isto revela que o modelo está incompleto. Por isso, temos de o refinar e afirmar que, na verdade, a órbita não é exatamente uma circunferência, mas uma elipse e a velocidade não é exatamente constante, mas é mais rápida na parte da elipse que está mais próxima da Terra. As leis de Newton fornecem um modelo mais refinado do céu, modelo que descreve as órbitas e as forças entre os corpos celestes. No entanto, as leis de Newton não podem explicar todos os fenómenos astronómicos e, em algum momento, precisamos de utilizar a teoria da relatividade de Einstein. E assim sucessivamente. Há ainda fenómenos à espera de um bom modelo. Isto não significa que modelos mais simples sejam errados ou inúteis. Eles fornecem ainda um bom panorama, compreensão e

aproximações da realidade. Modelos mais refinados são mais precisos e fornecem compreensão mais profunda.

Recursos

- App sobre as fases da Lua e eclipses:
<https://imaginary.github.io/moonphaseseclipses>

Crie e compartilhe!

Partilhe as descobertas dos participantes utilizando as hashtags **#idm314eclipses** e **#idm314**.

© 2024 Christiane Rousseau, Daniel Ramos

Este trabalho está licenciado sob uma Licença [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).