



Les mathématiques des éclipses

Une éclipse de lune se produira les [13 et 14 mars 2025](#), précisément le jour de la JIM 2025. Il s'agira d'une éclipse lunaire totale visible sur une grande partie du continent américain. Six mois plus tard, les [7 et 8 septembre 2025](#), une éclipse de lune similaire se produira, visible totalement dans la majeure partie de l'Asie, de l'Afrique de l'Est et de l'Australie. Il s'agit là d'une bonne occasion de discuter des mathématiques des éclipses.

Participant·es et participant·s :

À partir de 13 ans

Aucune connaissance mathématique préalable n'est nécessaire, mais les participant·s doivent avoir une compréhension de base des mouvements de la Terre et de la Lune.

Activité :

Réaliser un modèle physique du Soleil, de la Terre et de la Lune.

Discuter des mathématiques qui sous-tendent le phénomène des éclipses.

Matériel :

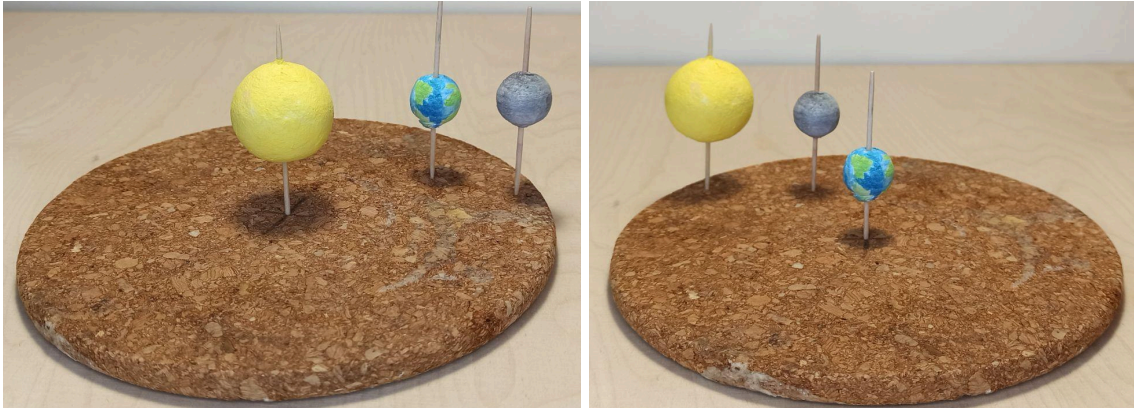
- Trois boules en coton comprimé, ou en polystyrène, ou en bois, etc. Les boules doivent être munies d'un trou de passage. Il est préférable d'avoir des boules de tailles différentes.
- Des cure-dents ou baguettes minces que l'on peut enfoncer dans les boules.
- De la peinture à l'eau ou un autre type de peinture adapté pour colorer des boules.
- Une surface en liège ou en carton pour fixer les cure-dents.

Préparatifs :

- Peignez une grosse boule en jaune (le Soleil), une boule moyenne en vert et bleu (la Terre) et une petite boule en gris (la Lune).

1. Le modèle planaire

Tâche : Épinglez les trois boules sur le carton telles qu'elles sont dans la réalité et décrivez leur mouvement.

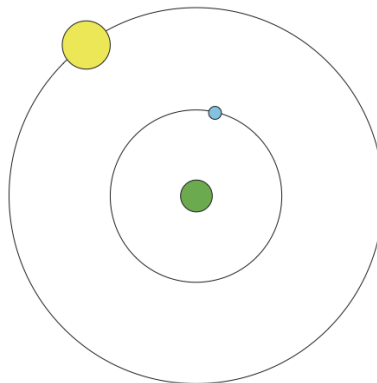


Les deux principaux mouvements relatifs du Soleil, de la Terre et de la Lune sont :

- La Terre tourne autour du Soleil.
- La Lune tourne autour de la Terre.

Vous pouvez placer le Soleil au centre, la Terre à une certaine distance et la Lune près de la Terre. Les tailles et les distances ne seront certainement pas à l'échelle, mais seules des estimations approximatives sont nécessaires.

Une autre option consiste à placer la Terre au centre, le Soleil et la Lune se déplaçant autour d'elle. Ce modèle est également valable. Cela illustre une idée très importante : le « centre » dépend simplement de la référence que l'on prend (il n'y a pas de centre absolu de l'univers).



Dans le premier cas, il s'agit d'un modèle héliocentrique (Helios = Soleil) et dans le second, d'un modèle géocentrique (Geo = Terre). Les deux points de vue sont équivalents, mais il arrive qu'un point de vue soit meilleur pour la compréhension du phénomène ou pour les calculs. Les mathématiciens utilisent des changements de point de vue à ces fins.

Toutes les configurations ne sont pas valables. Par exemple, placer le Soleil entre la Terre et la Lune est une erreur.

En supposant que le pôle Nord de la Terre soit vers le haut, la Terre devrait se déplacer dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour du Soleil (même chose pour le Soleil autour de la Terre). La Lune devrait également se déplacer dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de la Terre. La Terre tourne également sur son axe dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Notez que nous plaçons tous les corps sur le même plan, ce qui n'est pas le cas dans la réalité.

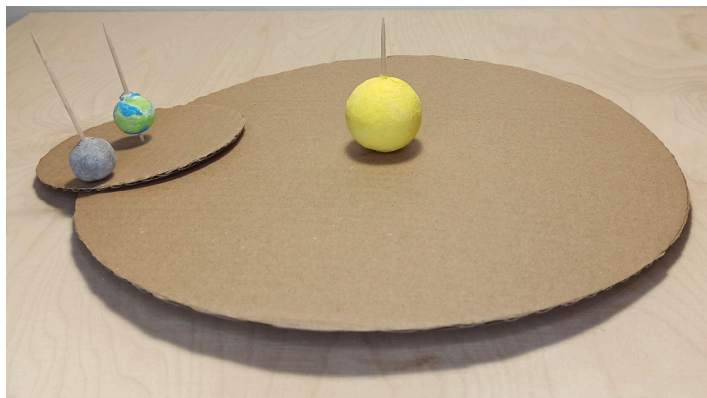
2. Phases de la Lune et éclipses.

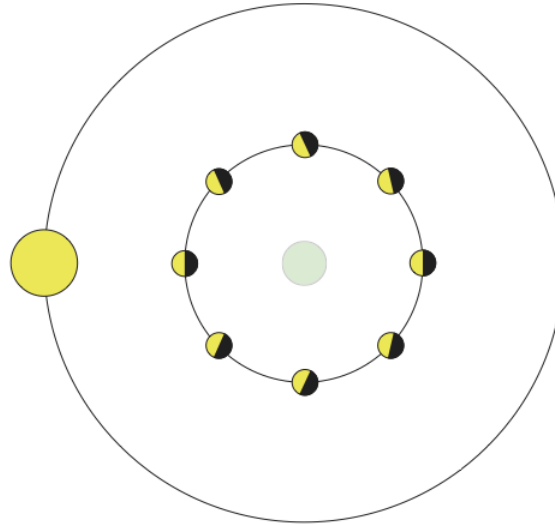
Tâche : Rédigez une définition des événements astronomiques suivants et construisez un modèle avec les boules :

- a. Nouvelle lune
- b. Premier quartier
- c. Pleine lune
- d. Dernier quartier
- e. Éclipse solaire (totale ou partielle)
- f. Éclipse lunaire (totale ou partielle)

Discussion : Une réponse élémentaire serait

- Le Soleil ne peut éclairer que la moitié de la Lune. Les phases de la Lune se produisent parce qu'une partie seulement de la moitié éclairée de la Lune fait face à la Terre.
- Les éclipses se produisent lorsque les trois corps célestes sont alignés d'une manière ou d'une autre et que l'un d'entre eux en cache un autre.

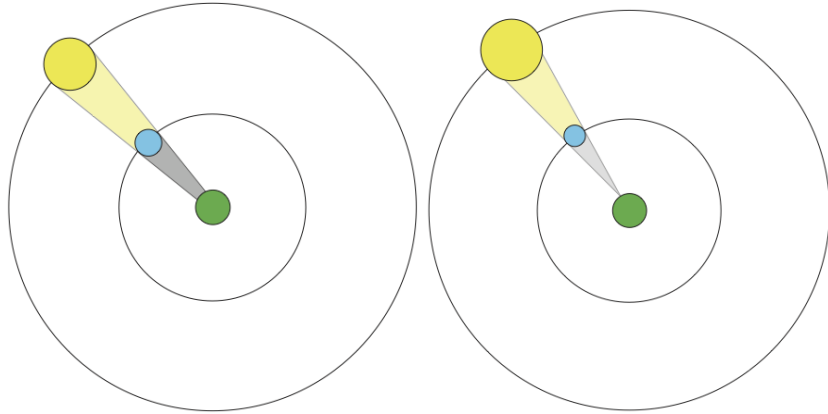




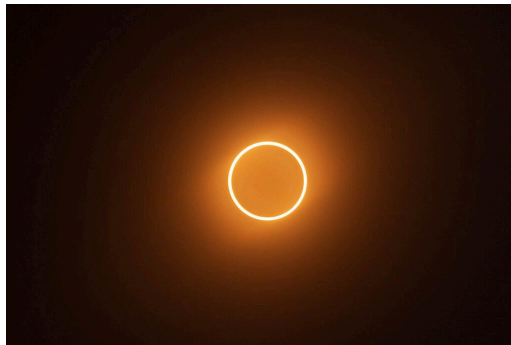
Les phases de la Lune

Voici les réponses cherchées

- a. *Nouvelle lune.* La Lune se trouve entre la Terre et le Soleil (mais elle n'est pas alignée avec eux). La face de la Lune qui est éclairée nous est opposée, et nous sommes face à la moitié de la Lune qui n'est pas éclairée par le Soleil (elle est dans l'ombre). Dans les régions de la Terre où il fait jour, la Lune est dans le ciel mais elle n'est pas visible (puisque'elle n'est pas éclairée). Dans les régions de la Terre où il fait nuit, la Lune n'est pas dans le ciel (elle est cachée derrière l'horizon).
- b. *Premier quartier.* Le Soleil, la Terre et la Lune forment un triangle à angle droit avec la Terre. La Lune est visible avant et après le coucher du soleil.
- c. *Pleine lune.* La Terre se trouve entre le Soleil et la Lune (mais n'est pas alignée avec eux). Nous pouvons voir presque tout l'hémisphère de la Lune éclairé par le Soleil pendant la majeure partie de la nuit.
- d. *Dernier quartier.* Le Soleil, la Terre et la Lune forment un triangle à peu près perpendiculaire à la Terre. La Lune est visible avant et après le lever du Soleil.
- e. *Éclipse solaire (totale, annulaire ou partielle).* La Terre se trouve dans l'ombre projetée par la Lune, de sorte que le Soleil disparaît momentanément derrière la Lune.
- f. *Éclipse lunaire (totale ou partielle).* La Lune se trouve dans l'ombre projetée par la Terre, de sorte que la Lune est momentanément obscurcie.

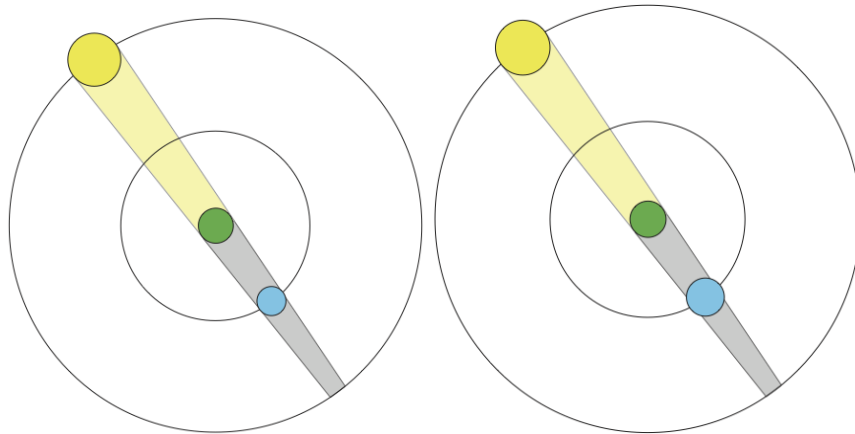


Une éclipse solaire totale et une éclipse solaire annulaire

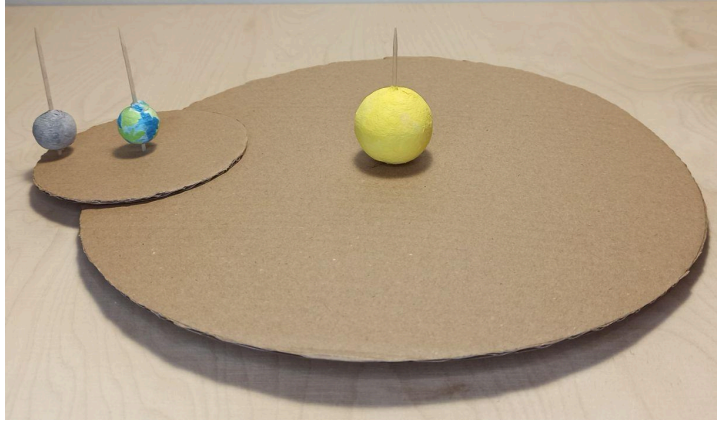


Photographie d'une éclipse annulaire

Source : Dpickd1 via Wikimedia Commons, CC-BY 4.0 ,



Éclipse lunaire totale (elle se produit) et éclipse lunaire annulaire (elle ne peut jamais se produire).



3. Périodes de rotation

Combien de temps faut-il à chaque corps pour effectuer un tour ?

Une première réponse, basée sur des mesures, serait la suivante :

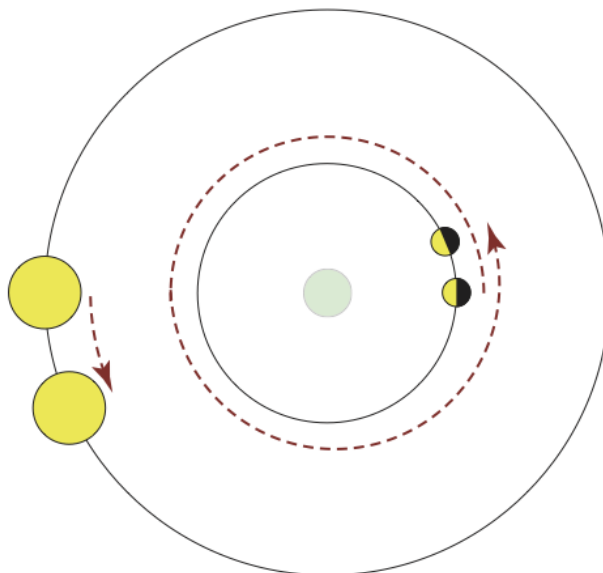
- La période de rotation de la Terre autour de son axe est d'un jour.
- La période de rotation de la Terre autour du Soleil est d'un an (environ 365,25 jours).
- La période de rotation de la Lune autour de la Terre est proche d'un mois (on pourrait ajouter : et c'est aussi le temps qu'il faut à la Lune pour passer par toutes ses phases).

Essayons d'être plus précis avec la Lune. Nous fixerons l'origine à la Terre (modèle géocentrique) car alors tous les mouvements sont circulaires (dans le modèle héliocentrique, la Lune effectue une trajectoire beaucoup plus compliquée).

Exercice : Supposons que la Lune fasse le tour de la Terre en 27,32 jours et le Soleil en 365,25 jours (par rapport aux étoiles fixes), et qu'ils tournent dans le même sens. Supposons qu'à un moment donné, les trois corps soient alignés. Calculez quand ils seront à nouveau alignés.

Solution :

En t jours, la Lune couvre un angle de $360 \frac{t}{27,32}^\circ$ et le Soleil couvre un angle de $360 \frac{t}{365,25}^\circ$. Supposons que nous commençons par aligner les trois corps. L'alignement suivant dans le même ordre se produit lorsque le Soleil a parcouru une fraction de tour et que la Lune a parcouru un tour complet plus la même fraction de tour.



Calculating the period between alignments

Cela signifie qu'il se produit pour t satisfaisant à l'équation

$$360 \frac{t}{27,32} = 360 + 360 \frac{t}{365,25},$$

dont la solution est $t = 29,53$ jours

Notez que pour définir ce qu'est « un tour », nous devons fixer un cadre de référence. Nous avons donc des définitions différentes :

- Un *mois sidéral* correspond à 27,32 jours. Il s'agit de la période que met la Lune à passer de la direction d'une étoile de référence à la même direction. (C'est aussi la période que prend la Lune entre deux passages dans le plan vertical contenant l'axe incliné de la Terre, du même côté de la Terre).
- Un *mois synodique* est de 29,53 jours, et c'est la période que prend la Lune pour être dans la direction du Soleil et pour revenir à nouveau dans la même direction.

Un mois synodique est la période entre deux pleines lunes. Au cours de cette période, la Lune passe par toutes ses phases.

Notez que cela se produit également avec la rotation de la Terre autour d'elle-même :

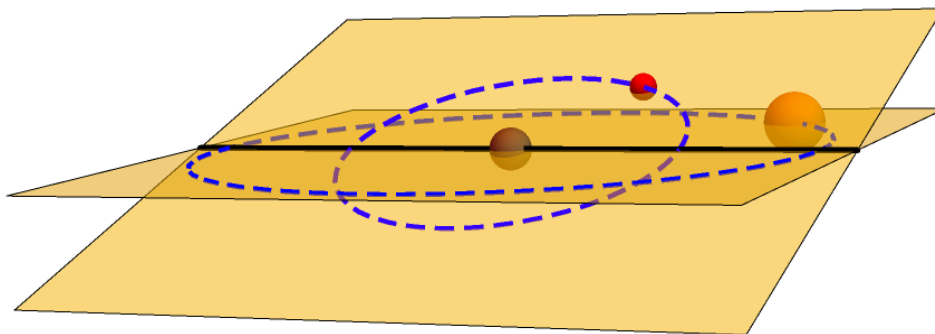
- Un *jour sidéral* correspond à 0,9972 jour (23 h 56 min 4,0905 s), et c'est la période pendant laquelle les cieux semblent faire un tour autour de la Terre (la Terre est dans la même orientation par rapport aux étoiles).
- Un *jour (solaire)* est la période pendant laquelle le Soleil semble faire un tour autour de la Terre (la Terre est dans la même orientation par rapport au Soleil). C'est la période entre deux moments où le soleil est au zénith (point le plus élevé).

4. Inclinaison du plan de l'orbite lunaire

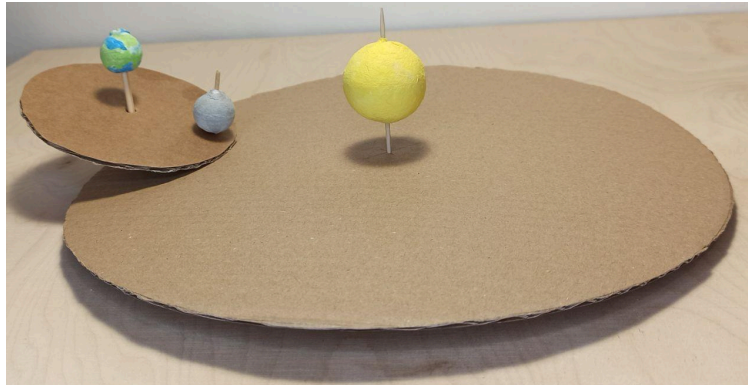
Avec le modèle actuel, il semble que chaque mois, nous aurions une éclipse solaire et une éclipse lunaire. Pourquoi n'y a-t-il pas d'éclipses tous les mois ?

Le plan orbital de la Lune autour de la Terre n'est pas le même que le plan orbital de la Terre autour du Soleil (appelé *écliptique*).

En réalité, les deux plans forment un angle d'environ 5° . Vous pouvez exagérer cet angle dans le modèle, puisque les tailles et les distances relatives sont déjà faussées.



Tâche : Construisez et dessinez un modèle héliocentrique tenant compte de l'inclinaison du plan orbital lunaire, et révisez les définitions que vous avez données à l'étape 3 avec ce nouveau modèle.



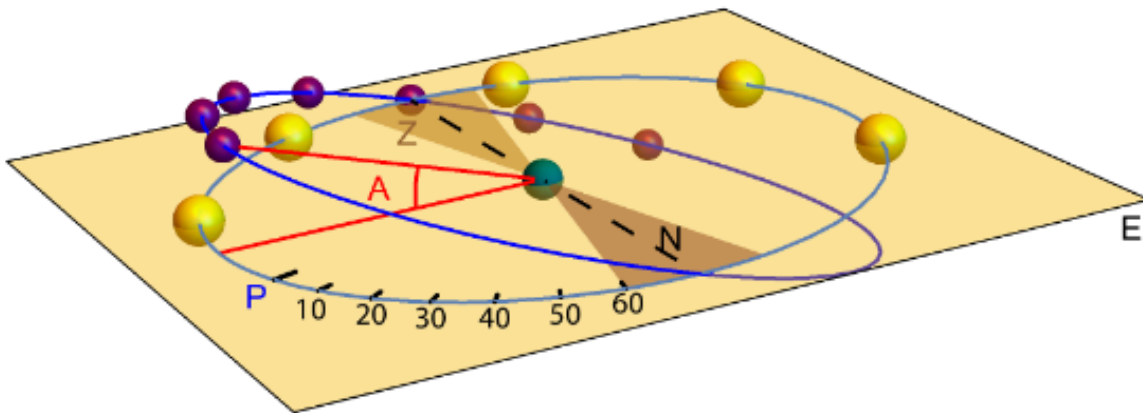
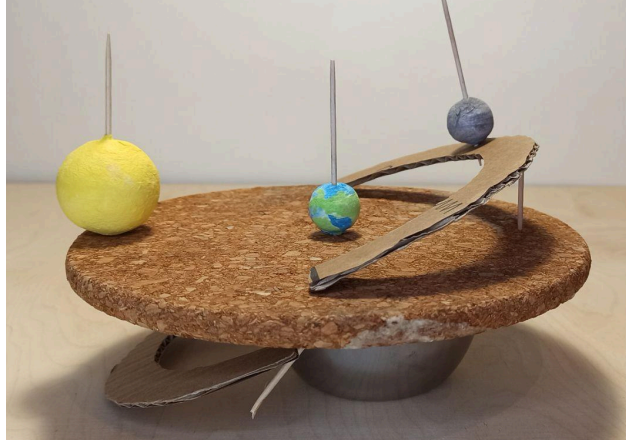
Vous pouvez aussi utiliser l'application interactive [Phases de la Lune et éclipses](#).

Le plan orbital lunaire et l'écliptique se coupent en une ligne, appelée *ligne des nœuds* ou *ligne nodale*. Le Soleil, la Terre et la Lune ne peuvent être alignés que sur cette ligne. Le Soleil se trouve sur la ligne nodale environ deux fois par an (deux saisons d'éclipses par an). Cependant, les éclipses sont plus rares car le Soleil n'est pas toujours sur la ligne nodale lorsque la Lune traverse cette ligne.

Note : Une subtilité qui ne figure pas dans notre modèle : La ligne nodale change lentement (précession nodale), de sorte que les saisons des éclipses ne sont pas en phase exacte avec les saisons de l'année.

Tâche : Construire et dessiner un modèle géocentrique tenant compte de l'inclinaison du plan orbital lunaire.

Ce modèle est équivalent au modèle héliocentrique (centré sur le Soleil), mais il donne plus d'indications et facilite les calculs. Placez la Terre au centre de la plaque de liège. Le Soleil, la Lune et toutes les étoiles se trouvent (en apparence) sur une sphère centrée sur la Terre, la *voûte céleste*.



Modèle géocentrique : Le Soleil (jaune) se déplace sur le plan de l'écliptique (E) et la Lune (violet) sur son plan orbital avec un angle d'inclinaison de $5,14^\circ$ (A). La ligne des nœuds (N) est l'intersection des deux plans. Pour qu'une éclipse se produise, le Soleil et la Lune doivent se trouver dans un voisinage de $18,5^\circ$ de la ligne des nœuds (zone brune Z). Le premier point du Bélier (P) marque l'origine de la longitude écliptique.

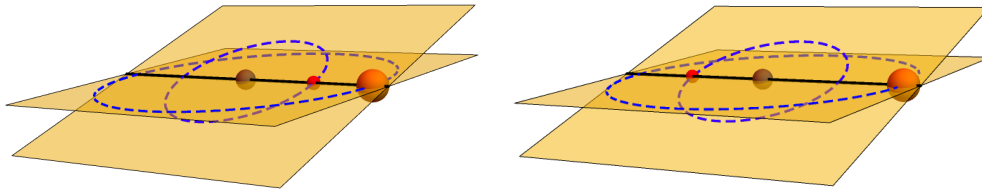
La trajectoire apparente du Soleil est l'*écliptique*. Il est commode de rendre le plan de l'écliptique horizontal dans notre modèle. Nous pouvons fixer l'origine de l'écliptique à la position du Soleil le premier jour du printemps (dans l'hémisphère Nord) en mars ; ce point est appelé *premier point du Bélier*. La longitude de l'écliptique est l'angle mesuré à partir du premier point du Bélier le long de l'écliptique. Le Soleil augmente la longitude de son écliptique d'environ 1 degré par jour, ce qui lui permet d'effectuer une rotation de 360 degrés autour de la Terre en 365,25 jours.

La Lune tourne autour de la Terre sur un plan incliné de $5,14^\circ$ par rapport à l'écliptique, et il lui faut un mois sidéral (27,32 jours) pour faire un tour. Le plan de l'orbite lunaire croise l'écliptique le long de la ligne nodale.

Exercice : Identifiez à nouveau les phases de la Lune et les éclipses.

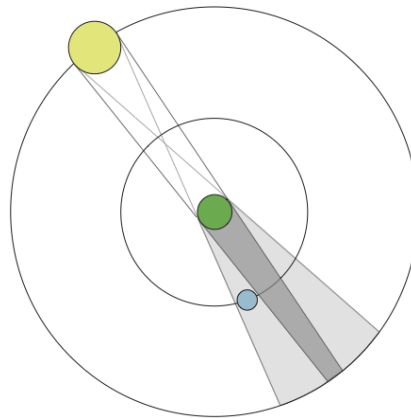
Notez que l'angle entre les deux plans étant très faible, il est logique de projeter la Lune sur le plan de l'écliptique et de mesurer son déplacement, par le biais de sa *longitude écliptique*.

Lorsque le Soleil et la Lune ont la même longitude écliptique, il s'agit d'une nouvelle lune. Après un mois synodique (29,53 jours), le Soleil et la Lune ont à nouveau la même longitude écliptique. Lorsque la différence entre leurs longitudes écliptiques est de 180° , il s'agit d'une pleine lune, et lorsque la différence est de 90° , il s'agit du premier ou du dernier quartier de lune. Une éclipse solaire est une nouvelle lune qui se produit sur la ligne nodale, et une éclipse lunaire est une pleine lune qui se produit sur la ligne nodale. Étant donné que le Soleil et la Lune ont une certaine largeur, il existe des marges autour de la ligne nodale (environ $18,5^\circ$) où une éclipse peut se produire.



Éclipses de soleil et de Lune

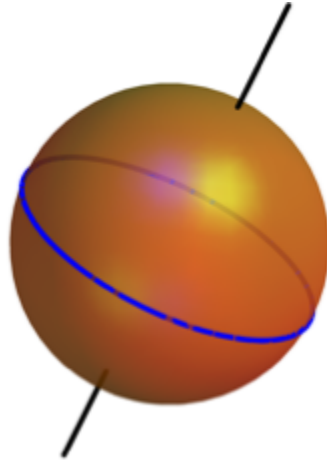
Lorsque la lumière du Soleil atteint la Terre, cela crée une zone d'ombre où aucune lumière du Soleil ne pénètre, et une région de pénombre où une partie de la lumière du Soleil pénètre. Il peut arriver que la Lune traverse la pénombre sans traverser l'ombre. Dans ce cas, on parle d'*éclipse lunaire pénombrale*. Une telle éclipse peut être totale ou partielle.



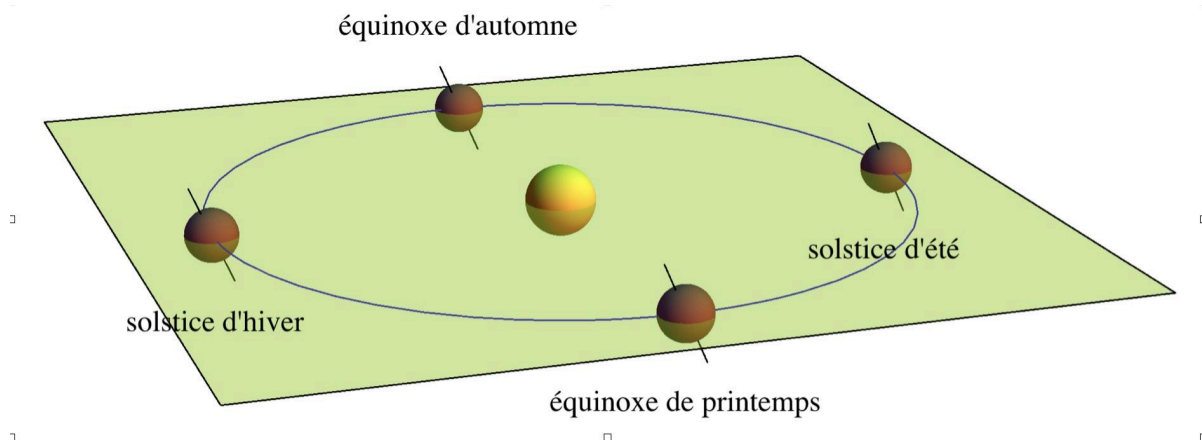
Éclipse lunaire totale pénombrale

5. Activité supplémentaire : Les saisons.

Introduisez l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre à votre (vos) modèle(s).



L'axe de la Terre forme un angle fixe de $23,44^\circ$ avec le plan de l'écliptique. Cet angle est à l'origine du mécanisme des saisons.



Question : Quand les premiers jours de l'été, de l'automne et de l'hiver apparaissent-ils (notez que la réponse dépend de l'hémisphère dans lequel vous vous trouvez) ? Expliquez pourquoi les saisons (froides et chaudes) sont dues à l'inclinaison de l'axe de la Terre ($23,44^\circ$). Demandez à vos élèves de déduire dans quelle direction l'axe de la Terre est incliné.

Réponse :

Si le premier point du Bélier est à 0° , l'été, l'automne et l'hiver (dans l'hémisphère Nord) sont situés respectivement à 90° , 180° et 270° . Dans l'hémisphère Sud, le premier point du Bélier correspond au premier jour de l'automne, et les points suivants correspondent respectivement à l'hiver, au printemps et à l'été.

Si le pôle Nord est orienté vers le haut dans votre modèle, il doit être incliné de 23,44° vers le Soleil le premier jour de l'été. Si vous préférez que le pôle Sud soit vers le haut, il devrait être incliné dans la direction opposée au Soleil.

Comparez les différents angles avec lesquels le Soleil atteint la Terre en été et en hiver à un endroit particulier de la Terre (par exemple à votre endroit), ainsi que les longues journées et les longues nuits aux pôles.

Note : Le premier point du Bélier est, par définition, à l'intersection du plan de l'écliptique et du plan de l'équateur terrestre. Cette ligne n'est pas fixe par rapport aux étoiles, car l'inclinaison de l'axe de la Terre varie (*précession des équinoxes*), mais son mouvement est extrêmement lent, environ un tour en 26 000 ans. Cependant, il s'est écoulé suffisamment de temps depuis que les Anciens ont nommé ce point comme étant à l'extrémité de la constellation du Bélier, et aujourd'hui ce point se trouve en fait dans la constellation des Poissons.

Cette précession signifie, entre autres, que la période de l'orbite de la Terre par rapport aux étoiles (*année sidérale*, 365,256363004 jours) est plus longue d'environ 20 minutes que la même orbite par rapport au Soleil (*année tropique*, 365,24219 jours). L'année tropique est l'année habituelle, la base du calendrier.

6. Matériel supplémentaire : Autres mois lunaires et fréquence des éclipses.

Il existe différentes notions de mois lunaire :

- *Mois sidéral* : C'est la période pendant laquelle la Lune fait un tour par rapport aux étoiles fixes. Il dure 27,321661 jours.
- *Mois synodique* : Du grec synode, rencontre. C'est la période pendant laquelle la Lune revient à la même longitude de l'écliptique. C'est la période des phases de la Lune. Ce mois dure 29,53059 jours.
- *Mois draconique* (du dragon mythique qui vivrait dans les deux nœuds et mangerait le Soleil ou la Lune lors des éclipses) : C'est la période pendant laquelle la Lune passe d'un nœud au même nœud. Il est légèrement différent du mois sidéral, 27,212220 jours.
- *Mois anomalistique* : La Lune se déplace sur une ellipse et non sur un cercle. La Lune apparaît donc un peu plus grosse lorsqu'elle est plus proche de la Terre et un peu plus petite lorsqu'elle en est plus éloignée. C'est la raison pour laquelle une éclipse solaire est parfois totale (la Lune couvre entièrement le Soleil) et parfois annulaire (la Lune couvre un cercle presque concentrique avec le Soleil, laissant un anneau de lumière visible ou le Soleil). L'axe de cette ellipse est en rotation. La période nécessaire à la Lune pour aller de son *périgée* (point le plus proche de l'orbite) au *périgée* suivant est un mois anomalistique, de durée 27,554551 jours.

Les Babyloniens et les Grecs de l'Antiquité disposaient d'un modèle assez élaboré du ciel. Ils ont défini ce que l'on appelle le cycle de saros, sur la base d'une coïncidence observationnelle : Un *cycle du saros* est

- 223 mois synodiques (exactement, par définition)
- 242 mois draconiques (presque exactement)
- 239 mois anomalistiques (presque exactement)
- 6 585,321347 jours
- 18,029 ans (18 ans, 11 jours et 8 heures)

Si une éclipse se produit, après un cycle de saros, la Lune se trouve à nouveau dans la même phase (un nombre entier de mois synodiques), traverse à nouveau l'écliptique (un nombre entier de mois draconiques) et a la même taille apparente (un nombre entier de mois anomalistiques), de sorte qu'une éclipse presque identique se produit. Les Grecs disposaient de tableaux annotés contenant toutes les éclipses d'un cycle du saros (enregistrées en 18 ans environ), à partir desquels ils pouvaient extrapoler toutes les éclipses (et leur type) pendant des siècles.

Étant donné qu'un saros dépasse d'un tiers (environ 8 heures) un nombre entier de jours, après un saros, la Terre a tourné d'un tiers de tour, de sorte qu'à partir de la même position sur Terre, l'éclipse sera vue avec une différence de 8 heures (donc dans une région du monde décalée de 120° de longitude). Tous les trois saros (54 ans et 34 jours), une éclipse presque identique peut être observée au même endroit et à la même heure.

Le saros et les nombres entiers de jours et de mois correspondent à l'idéal grec selon lequel « les nombres gouvernent tout » et que les nombres ne sont que des nombres naturels ou des fractions, soit des rapports entre les nombres naturels. Bien que les Grecs aient découvert les nombres irrationnels, cela a provoqué une crise profonde dans leur philosophie, et il était beaucoup plus agréable de penser que les cieux étaient gouvernés par ces nombres spéciaux.

7. Conclusions

Dans cette activité, nous avons construit plusieurs modèles. Un *modèle*, au sens mathématique, est une représentation simplifiée de la réalité qui nous permet d'explorer et de comprendre un système.

Dans le premier modèle que nous avons construit, les trois corps se déplaçaient dans le même plan. Nous avons affiné ce modèle en faisant orbiter la Lune sur un plan différent de celui du Soleil. Dans la dernière partie, nous avons inclus l'inclinaison axiale de la Terre et nous avons mentionné plusieurs améliorations que nous pourrions envisager pour rendre le modèle plus précis.

Un modèle est basé sur des observations de la nature et propose un mécanisme « comme si » la nature le suivait. Dans la section 3, nous avons calculé le mois synodique à partir du mois sidéral. Cependant, nous pouvons mesurer les deux directement dans la nature : En observant la position de la Lune par rapport aux étoiles, nous mesurons le mois sidéral. En observant les phases de la Lune (c'est-à-dire sa position par rapport au Soleil), nous mesurons le mois synodique. Ces observations correspondent-elles à la valeur calculée ? Oui ! Cela valide le modèle puisque la Lune se comporte *comme si* elle tournait autour de la Terre sur un cercle, à

vitesse constante. Sauf que... En réalité, les observations ne correspondent pas aux calculs si l'on mesure avec suffisamment de précision ! Cela révèle que le modèle est incomplet. Il faut alors affiner et dire qu'en fait, l'orbite n'est pas exactement un cercle mais une ellipse, et que la vitesse sur cette ellipse n'est pas exactement constante mais qu'elle est plus grande dans la partie de l'ellipse qui est plus proche de la Terre. Les lois de Newton fournissent un modèle plus raffiné du ciel qui décrit les orbites et les forces entre les corps célestes. Cependant, les lois de Newton ne permettent pas d'expliquer tous les phénomènes astronomiques et, à un moment donné, il faut faire appel à la théorie de la relativité d'Einstein. Et ainsi de suite. Il y a encore des phénomènes qui attendent un bon modèle. Cela ne signifie pas que les modèles plus simples sont faux ou inutiles. Ils fournissent toujours une bonne vue d'ensemble, des aperçus et des approximations de la réalité. Les modèles plus raffinés sont plus précis et donnent des informations plus approfondies.

Resources

- Application interactive sur les phases de la Lune et les éclipses:
<https://imaginary.github.io/moonphaseseclipses>

Créez et partagez !

Partager les conclusions des participants à l'aide de l'outil **#idm314eclipses** et **#idm314**.

© 2024 Daniel Ramos, Christiane Rousseau

Ce texte est soumis à une [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).