



Las matemáticas de los eclipses

Entre el [13 y 14 de marzo de 2025](#) se producirá un eclipse lunar, coincidiendo con el Día Internacional de las Matemáticas 2025. Este será un eclipse lunar total visible en gran parte de las Américas. Seis meses después, entre el [7 y 8 de septiembre de 2025](#), se producirá un eclipse lunar similar, visible totalmente en la mayor parte de Asia, el este de África y Australia. Esta puede ser una buena oportunidad para hablar sobre las matemáticas de los eclipses.

Participantes:

A partir de 13 años.

No se necesitan conocimientos matemáticos previos, pero los participantes deben tener una comprensión básica de los movimientos de la Tierra y la Luna.

Actividad:

Realización de un modelo físico del Sol, la Tierra y la Luna.

Comprender las matemáticas detrás del fenómeno de los eclipses.

Materiales:

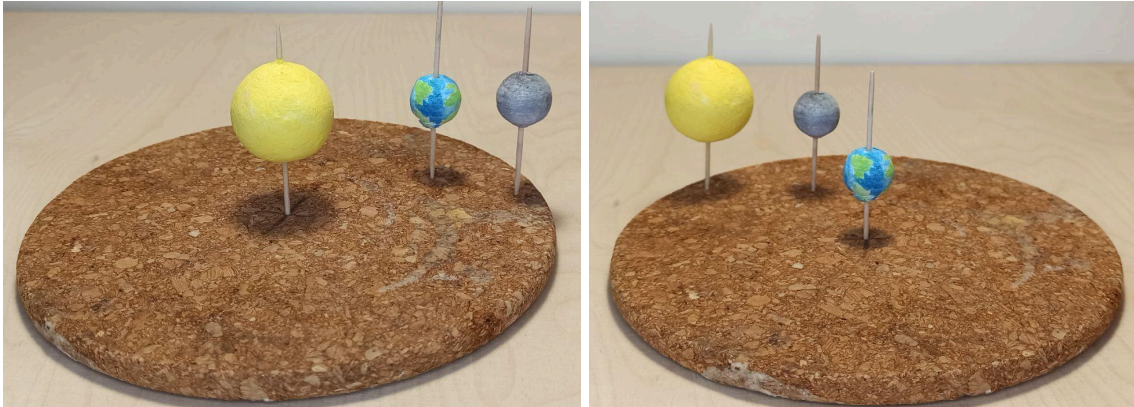
- Tres bolas de algodón comprimido, poliestireno, madera, u otro material. Las bolas deben tener un orificio pasante. Lo ideal es tener dos o tres tamaños, aunque no es indispensable.
- Palillos de dientes que se puedan clavar a través de las bolas.
- Acuarela u otro tipo de pintura que sea adecuada para colorear las bolas.
- Superficie de corcho o cartón para fijar los palillos.

Preparación:

- Pinta una bola grande de amarillo (el Sol), una bola mediana de verde y azul (Tierra) y una bola pequeña de gris (Luna).

1. Modelo plano

Tarea: Fija las tres bolas en cartón tal y como el Sol, la Tierra y la Luna se encuentran en el espacio, y describe cómo se mueven.

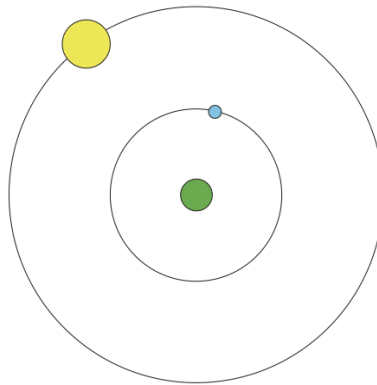


Los dos principales movimientos relativos del Sol, la Tierra y la Luna son:

- La Tierra gira alrededor del Sol.
- La Luna gira alrededor de la Tierra.

Puedes poner el Sol en el centro, la Tierra a cierta distancia y la Luna cerca de la Tierra. Los tamaños y distancias ciertamente no serán a escala, pero sólo se necesitan estimaciones aproximadas.

Otra opción es poner la Tierra en el centro y el Sol y la Luna moviéndose alrededor. Este también es un modelo válido. Esto ilustra una idea muy importante: el “centro” es sólo una cuestión de qué referencia se tome (no existe un centro absoluto del universo).



El primer caso es un modelo Heliocéntrico (Helios = Sol), y el segundo es un modelo Geocéntrico (Geo = Tierra). Ambos puntos de vista son equivalentes, pero a veces un punto de vista es mejor para comprender el fenómeno o para realizar cálculos. En matemáticas se utilizan cambios de punto de vista para estos fines.

No todas las configuraciones son válidas, por ejemplo poner el Sol entre la Tierra y la Luna es incorrecto.

Suponiendo que el Polo Norte de la Tierra esté hacia arriba, la Tierra debería moverse en sentido antihorario alrededor del Sol (o el Sol alrededor de la Tierra). La Luna también debería moverse en sentido antihorario alrededor de la Tierra. La Tierra también gira sobre su eje en sentido antihorario. Observa que que estamos colocando todos los cuerpos en el mismo plano, aunque como veremos, no es así como se encuentran en realidad.

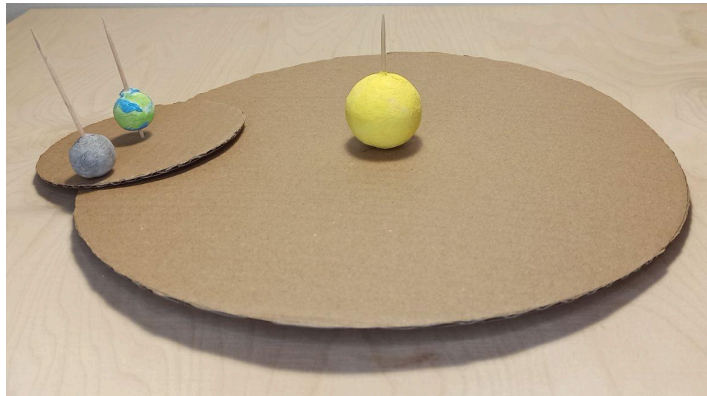
2. Fases lunares y eclipses.

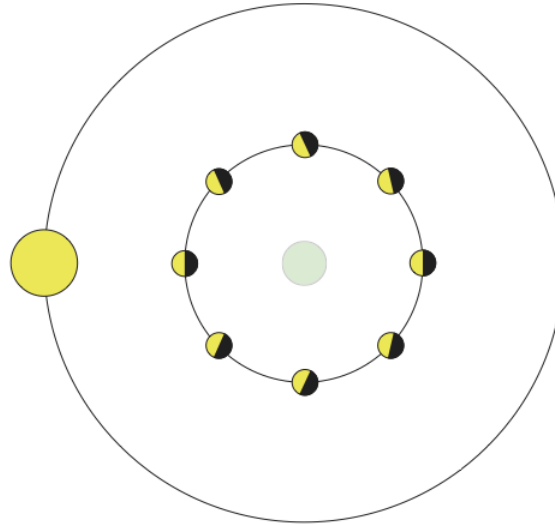
Tarea: Escribe una definición de los siguientes eventos astronómicos, junto con la construcción de un modelo con las bolas en el corcho:

- a. Luna nueva
- b. Cuarto creciente
- c. Luna llena
- d. Cuarto menguante
- e. Eclipse solar (total o parcial)
- f. Eclipse lunar (total o parcial)

Conversar: Una respuesta básica sería:

- El Sol sólo puede iluminar la mitad de la Luna. Las fases de la Luna suceden porque sólo una parte de la mitad iluminada del Luna está de cara a la Tierra.
- Los eclipses ocurren cuando los tres cuerpos celestes están de alguna manera alineados y uno oculta a otro.

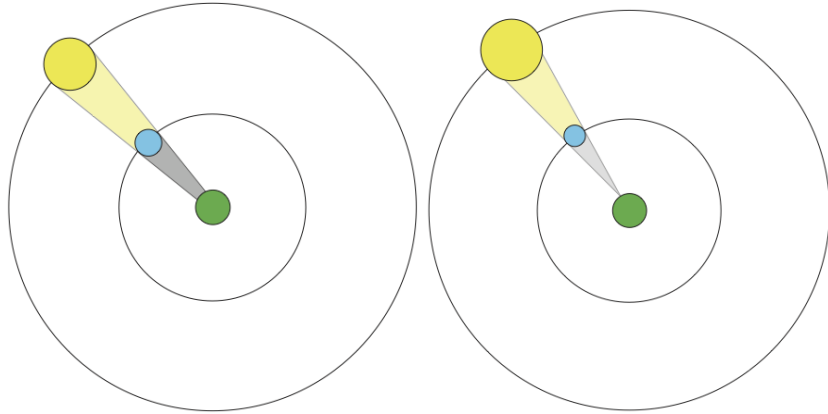




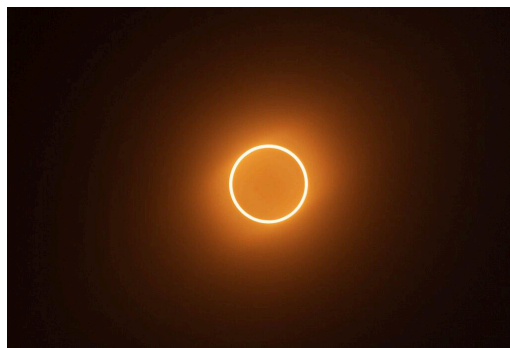
Fases de la luna

Las respuestas que buscamos son:

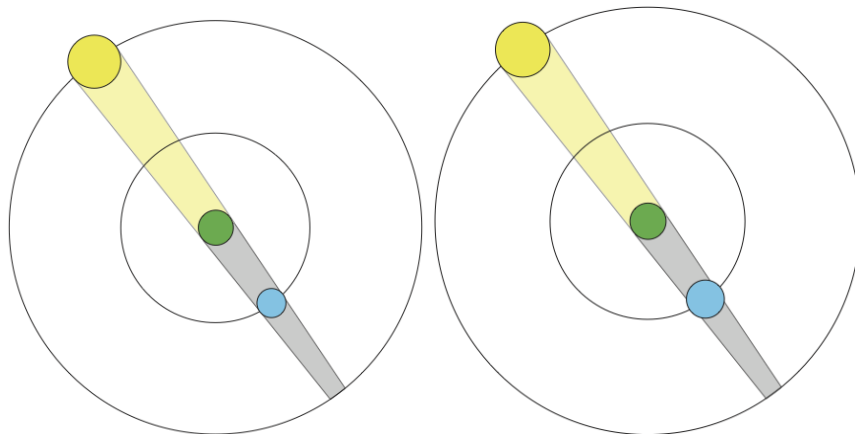
- a. *Luna nueva*. La Luna está entre la Tierra y el Sol (pero no alineada). El lado de la Luna que es iluminado está de espaldas a nosotros, y nosotros estamos mirando hacia el lado que no está iluminado por el Sol (está en la sombra). En las partes de la Tierra donde es de día, la Luna está en el cielo pero no es visible (ya que no está iluminada). En las partes de la Tierra donde es de noche, la Luna no está en el cielo (está escondida detrás del horizonte).
- b. *Cuarto creciente*. El Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo aproximadamente rectángulo con el ángulo recto en la Tierra. La Luna es visible antes y después del atardecer.
- c. *Luna llena*. La Tierra está entre el Sol y la Luna (pero no alineada). Podremos ver casi el hemisferio de Luna llena iluminado por el Sol durante la mayor parte de la noche.
- d. *Cuarto menguante*. El Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo aproximadamente rectángulo con el ángulo recto en la Tierra. La Luna es visible antes y después del amanecer.
- e. *Eclipse solar* (total, anular, o parcial). La Tierra está en la sombra proyectada por la Luna, por lo que el Sol desaparece momentáneamente detrás de la Luna.
- f. *Eclipse lunar* (total o parcial). La Luna está en la sombra proyectada por la Tierra, por lo que queda momentáneamente oscurecida.



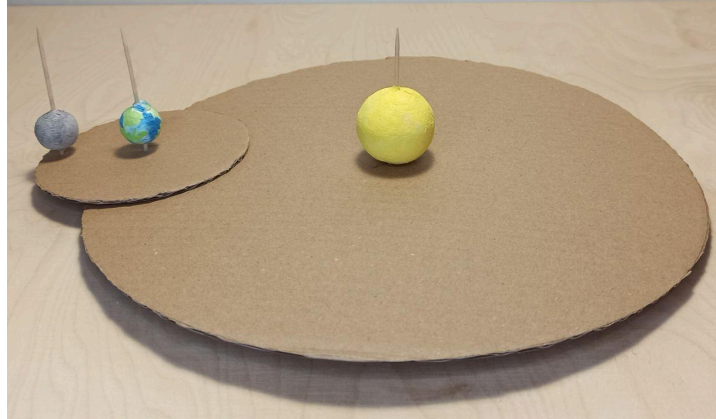
Un eclipse solar total y un eclipse solar anular.



Fotografía de un eclipse solar anular
Fuente: Dpickd1 vía Wikimedia Commons, CC-BY 4.0,



Eclipse lunar total (sucede) y eclipse lunar anular (nunca puede suceder)



3. Periodos de rotación

¿Cuánto tiempo le toma a cada cuerpo completar una vuelta?

Una primera respuesta, por nuestra experiencia cotidiana, sería:

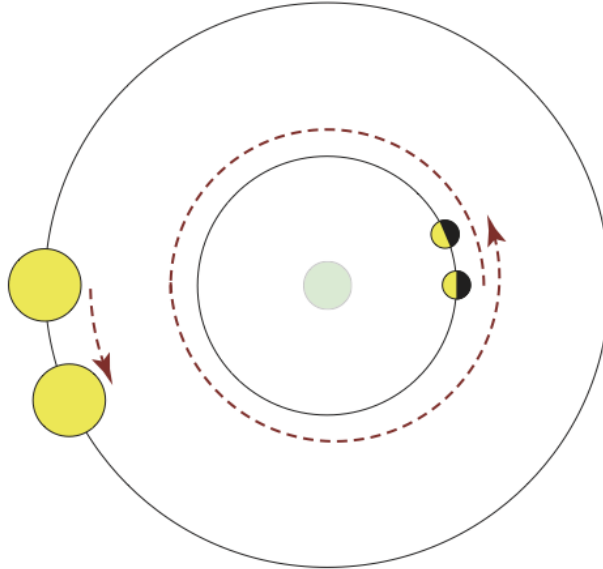
- El período de rotación de la Tierra alrededor de su eje es de un día;
- El período de rotación de la Tierra alrededor del Sol es de un año (unos 365,25 días)
- El período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es cercano a un mes (ese es también el tiempo que tarda la Luna en pasar por todas sus fases)

Intentemos ser más precisos con la Luna. Fijaremos el origen en la Tierra (modelo geocéntrico) porque así todos los movimientos son circulares (en el modelo heliocéntrico, la Luna describe una trayectoria mucho más complicada).

Ejercicio: Supongamos que la Luna da la vuelta a la Tierra en 27,32 días (respecto a las estrellas, que están fijas), y que el Sol da una vuelta a la Tierra en 365,25 días (también respecto a las estrellas fijas), y que giran en el mismo sentido. Supongamos además que en algún momento los tres cuerpos están alineados. Calcula cuándo volverán a estar alineados.

Solución:

En t días la Luna avanza un ángulo de $360 t/27,32^\circ$ y el Sol avanza un ángulo de $360 t/365,25^\circ$. Supongamos que empezamos con los tres cuerpos alineados. La siguiente vez que vuelven a estar alineados en el mismo orden ocurre cuando el Sol ha recorrido una fracción de vuelta y la Luna (que va más rápido) ha recorrido una vuelta completa más la misma fracción de vuelta.



Calcular el periodo entre alineaciones

Esto significa que en el momento de estar de nuevo alineados, t satisface la ecuación

$$360 \frac{t}{27.32} = 360 + 360 \frac{t}{365.25}$$

cuya solución es $t = 29,53$ días. Esa es nuestra respuesta.

Observemos que para definir qué es "un giro", necesitamos fijar un marco de referencia. Así tenemos diferentes definiciones:

- Uno *mes sidéreo* equivale a 27,32 días, y es el período que tarda la Luna desde que está en dirección a cualquier estrella de referencia hasta que vuelve a estar en la misma dirección. (También es el período de la Luna entre dos pasajes en el plano vertical que contiene el eje inclinado de la Tierra, en el mismo lado de la Tierra).
- Uno *mes sinódico* equivale a 29,53 días, y es el periodo que tarda la Luna desde que está en dirección al Sol hasta que vuelve a estar en la misma dirección.

Un mes sinódico es el período entre dos lunas llenas. Durante este período la luna pasa por todas sus fases.

En realidad, esto también sucede con la rotación de la Tierra sobre sí misma.

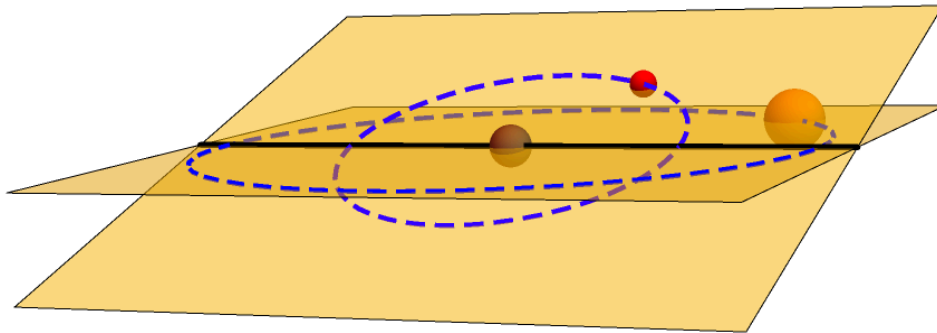
- Un *día sidéreo* equivale a 0,9972 días (23 h 56 min 4,0905 s), y es el período en el que los cielos parecen dar una vuelta alrededor de la Tierra (la Tierra está en la misma orientación respecto a las estrellas).
- Uno *día (solar)* es el período en el que el Sol parece dar una vuelta alrededor de la Tierra (la Tierra está en la misma orientación con respecto al Sol). Es también el periodo entre dos momentos en que el sol se encuentra en su cenit (punto más alto), el mediodía solar.

4. Inclinación del plano de la órbita lunar

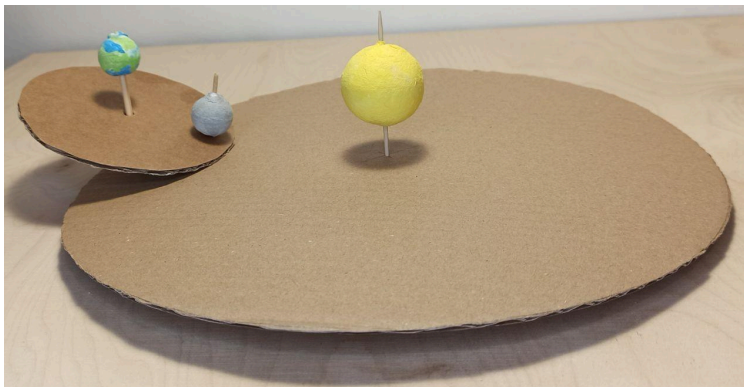
Con el modelo que hemos construido, parece que cada mes tendríamos un eclipse solar y un eclipse lunar. ¿Por qué no tenemos eclipses todos los meses?

El plano orbital de la Luna alrededor de la Tierra no es el mismo que el plano orbital de la Tierra alrededor del Sol (llamado plano de la Eclíptica).

En realidad, los dos planos forman un ángulo de unos 5° . Puedes exagerar el ángulo en el modelo, ya que los tamaños y distancias relativos ya están fuera de escala.



Tarea: Construye y dibuja un modelo heliocéntrico teniendo en cuenta la inclinación del plano orbital lunar y revisa las definiciones que diste en el paso 3 con este nuevo modelo.



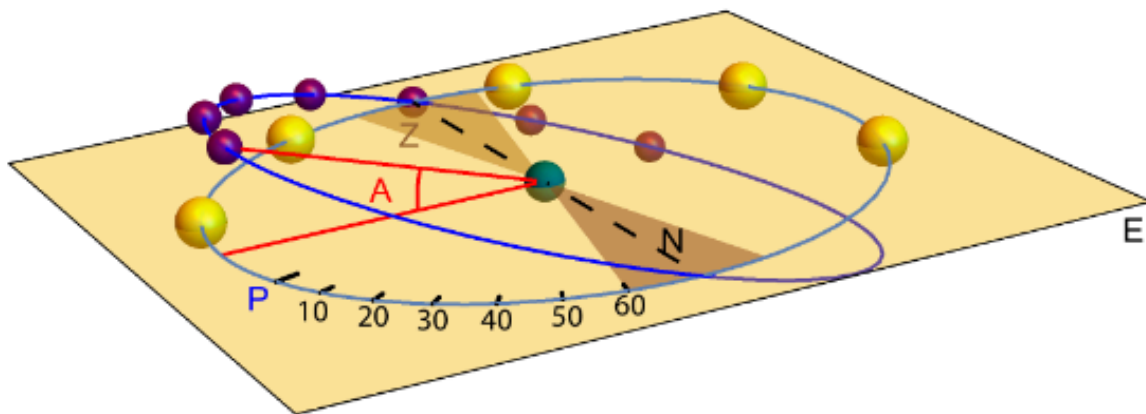
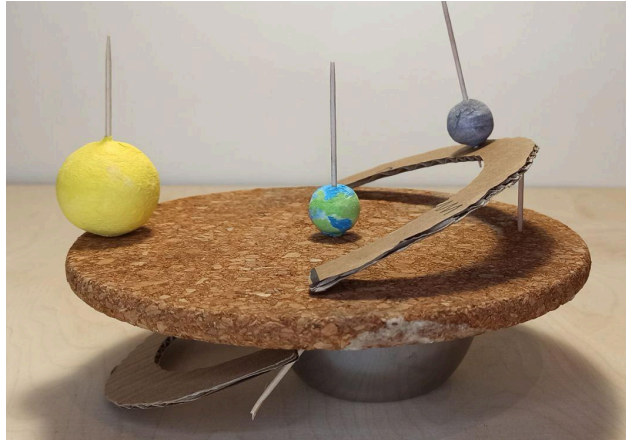
También puedes ver la aplicación interactiva [Fases lunares y eclipses](#).

El plano orbital lunar y el de la eclíptica se cruzan en una línea, llamada *línea nodal*. El Sol, la Tierra y la Luna sólo pueden alinearse sobre esta línea. El Sol está en la línea nodal aproximadamente dos veces al año (dando lugar a dos estaciones de eclipses en un año). Sin embargo, los eclipses son raros porque no siempre el Sol se encuentra sobre la línea nodal a la vez que la Luna también cruza esa línea.

Nota: Una sutileza que no está en nuestro modelo: La línea nodal gira lentamente (precesión nodal), por lo que las estaciones de los eclipses no están sincronizadas con las estaciones del año.

Tarea. Construye y dibuja un modelo geocéntrico considerando la inclinación del plano orbital lunar.

Este modelo es equivalente al modelo heliocéntrico (centrado en el Sol), pero proporcionará más información y cálculos más sencillos. Pon la Tierra en el centro del plato de corcho. El Sol, la Luna y todas las estrellas se encuentran (aparentemente) en una esfera centrada en la Tierra, la *cúpula del cielo*.



Modelo geocéntrico: El Sol (amarillo) se mueve en el plano de la eclíptica (E), y la Luna (violeta) en su plano orbital, inclinado un ángulo de 5.14° (A). La Línea nodal (N) es la intersección de ambos planos. Para que ocurra un eclipse, tanto el Sol como la Luna deben encontrarse dentro de un entorno de 18.5° de la línea nodal (zona marrón Z). El Primer Punto de Aries (P) marca el origen de la longitud eclíptica.

La trayectoria aparente del Sol es la eclíptica. Es conveniente hacer que el plano de la eclíptica sea horizontal en nuestro modelo. Podemos fijar el origen de la eclíptica en la posición del Sol el primer día de primavera (en el hemisferio norte) en marzo; este punto se llama *Primer Punto de Aries*. La *longitud eclíptica* es el ángulo medido desde el primer punto de Aries a lo largo de

la eclíptica. El Sol aumenta su longitud eclíptica aproximadamente 1 grado por día, tardando 365,25 días en completar su rotación de 360 grados alrededor de la tierra.

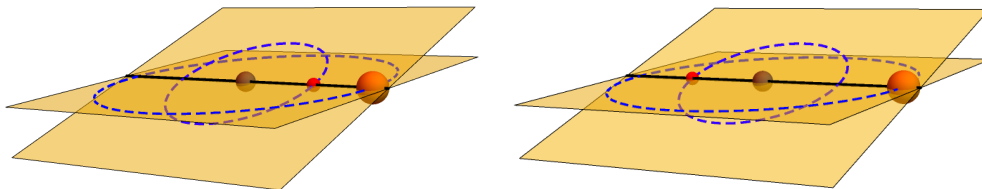
La luna gira alrededor la Tierra en un plano inclinado $5,14^\circ$ con respecto a la eclíptica, y tarda un mes sidéreo (27,32 días) en dar una vuelta. El plano de la órbita lunar cruza la eclíptica en la línea nodal.

Ejercicio: Identificar nuevamente las fases de la Luna y los eclipses.

Observa que debido a que el ángulo entre los dos planos es tan pequeño, tiene sentido proyectar la Luna en el plano de la eclíptica y medir cómo se mueve, a través de su longitud eclíptica.

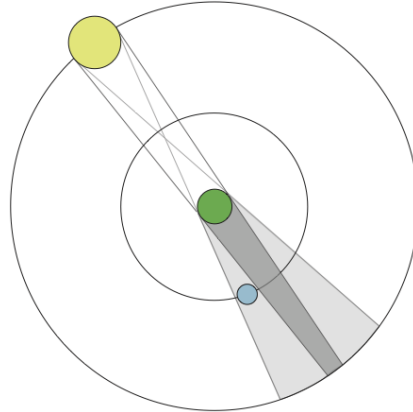
Cuando el Sol y la Luna tienen la misma longitud eclíptica, se produce la Luna nueva. Después de un mes sinódico (29,53 días), el Sol y la Luna vuelven a tener la misma longitud eclíptica y es Luna nueva otra vez. Cuando la diferencia entre sus longitudes eclípticas es 180° , se produce la Luna llena, y cuando la diferencia es de 90° , la luna se halla en cuarto creciente o menguante.

Un eclipse solar es una Luna nueva que ocurre en la línea nodal, y un eclipse lunar es una luna llena que ocurre en la línea nodal. Dado que el Sol y la Luna tienen cierta anchura, existen algunos márgenes alrededor de la línea nodal (unos $18,5^\circ$) donde puede ocurrir un eclipse.



Eclipses solares y lunares

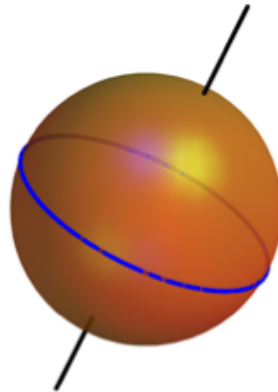
Cuando la luz del Sol llega a la Tierra, se crea una zona de umbra (sombra) donde no penetra la luz del Sol, y una región de penumbra donde penetra parte de la luz del Sol. Podría ocurrir que la Luna atravesara la penumbra sin atravesar la umbra. En tal caso hablamos de eclipse lunar penumbral. Un eclipse así puede ser total o parcial.



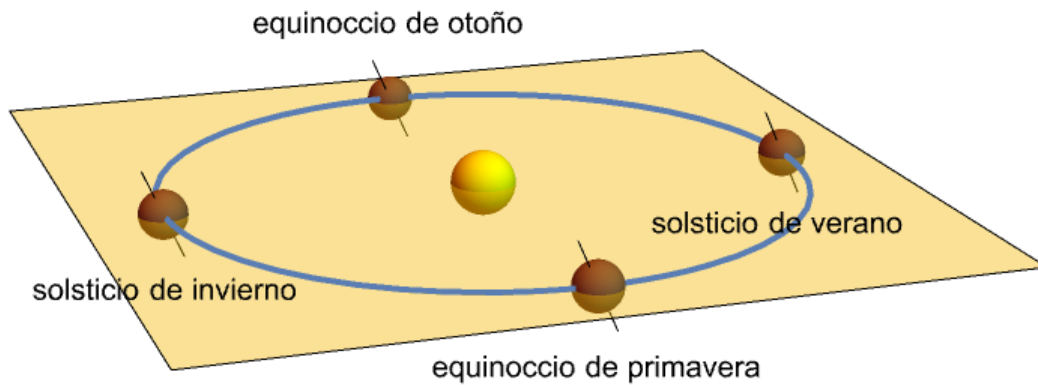
Eclipse lunar total penumbral

5. Actividad extra: Las estaciones.

Introduzcamos la inclinación del eje de rotación de la Tierra en nuestro modelo.



El eje de la Tierra forma un ángulo fijo con el plano de la Eclíptica. Este ángulo es responsable del mecanismo de las estaciones.



Pregunta: ¿Dónde se encuentra el Sol cuando entran la primavera, el verano, el otoño y el invierno? (ten en cuenta que la respuesta depende en qué hemisferio te encuentres). Explica por qué las estaciones (fría y cálida) están provocadas por la inclinación del eje de la Tierra (23,44°). Deduce en qué dirección está inclinado ese eje..

Respuesta:

El primer punto de Aries es el punto de la eclíptica donde está el sol el primer día de primavera en el hemisferio norte. Es el origen de la longitud de la eclíptica. Así, la entrada de la primavera está por definición ubicada en la longitud eclíptica de 0°. El verano, otoño e invierno (en el hemisferio norte) se sitúan en 90, 180° y 270° respectivamente. En el hemisferio sur, el primer punto de Aries corresponde al primer día de otoño, y los siguientes puntos corresponden a invierno, primavera y verano, respectivamente.

Si el Polo Norte está hacia arriba en tu modelo, el eje de la Tierra debe estar inclinado 23,44° hacia el Sol el primer día de verano. Si prefieres el Polo Sur hacia arriba, este debe estar inclinado en dirección opuesta al Sol en ese mismo momento.

Compara los diferentes ángulos con los que los rayos del Sol llegan a la Tierra en verano e invierno en un lugar particular en la Tierra (por ejemplo donde tú te encuentras), y los largos días y noches en los polos.

Nota: El Primer Punto de Aries está, por definición, en la intersección del plano de la eclíptica y el plano del ecuador de la Tierra. Esta línea no es fija con respecto a las estrellas, porque la inclinación del eje de la Tierra cambia (la *precesión de los equinoccios*), pero su movimiento es extremadamente lento, alrededor de una vuelta cada 26.000 años. Sin embargo, ha pasado suficiente tiempo desde que los Antiguos nombraron ese punto como la punta de la constelación de Aries, y hoy ese punto está en realidad en la constelación de Piscis.

Esta precesión, entre otras cosas, significa que el período de la órbita de la Tierra con respecto a las estrellas (*año sidéreo*, 365.256363004 días) es unos 20 minutos más largo que el de la misma órbita con respecto al Sol (*año tropical*, 365.24219 días). El año tropical es el año habitual, la base del calendario.

6. Material extra: Otros meses lunares y frecuencia de eclipses.

Existen diferentes nociones de mes lunar:

- Mes sidéreo (de las estrellas): Es el período que toma la Luna para realizar un giro respecto a las estrellas fijas. Tiene una duración de 27,321661 días.
- Mes sinódico (del griego sínodo, reunión). Es el período de la Luna para volver a alcanzar la misma longitud eclíptica que el Sol. Es el período de las fases lunares. Tiene una duración de 29,53059 días.

- Mes dracónico (del dragón mítico que se dice que vive en los dos nodos y se come el Sol o la Luna durante los eclipses): Es el período para que la Luna vuelva a pasar de un nodo al mismo nodo. Es ligeramente diferente del mes sidéreo, 27.212220 días.
- Mes anomalístico: la Luna se mueve en una elipse, no en un círculo. Esto hace que la Luna parezca un poco más grande cuando está más cerca de la Tierra y un poco más pequeña cuando está más lejos. Esta es la razón por la que a veces un eclipse solar es total (la Luna cubre completamente al Sol) y otras veces es anular (la Luna cubre un círculo casi concéntrico con el Sol, dejando un anillo de luz visible o el Sol). El eje de esa elipse está girando. El periodo que tarda la Luna en pasar de su perigeo (punto más cercano de la órbita) a él nuevamente es un mes anómalo, que dura 27,554551 días

Los antiguos babilonios y griegos tenían un modelo de cielo bastante desarrollado. Definieron el llamado ciclo de Saros, basándose en una coincidencia observacional:

Un ciclo de Saros es

- 223 meses sinódicos (exactamente, por definición)
- 242 meses dracónicos (casi exactamente)
- 239 meses anómalos (casi exactamente)
- 6.585,321347 días
- 18.029 años (18 años, 11 días y 8 horas)

Si ocurre un eclipse, entonces después de un ciclo de Saros, la Luna vuelve a estar en la misma fase (un número entero de meses sinódicos), cruzando la eclíptica nuevamente (un número entero de meses dracónicos) y con el mismo tamaño aparente (un número entero número de meses anómalos), por lo que se produce un eclipse casi idéntico. Los griegos habían anotado tablas con todos los eclipses en un ciclo de Saros (registrados en unos 18 años), a partir de las cuales podían extrapolar todos los eclipses y (su tipo) durante siglos.

Dado que un Saros supera en un tercio un número entero de días, (unas 8 horas), después de un Saros la Tierra ha girado un tercio de vuelta, por lo que desde la misma posición de la Tierra, el eclipse se verá con 8 horas de diferencia (por lo tanto, en una región de la Tierra desplazada por 120° de longitud). Cada tres Saros (54 años y 34 días), se puede ver un eclipse casi idéntico desde el mismo lugar, a la misma hora.

El Saros y los números enteros de días y meses se ajustan al ideal griego de que “los números gobiernan todo” y que los números son sólo números naturales o fracciones, siendo estas últimas relaciones entre números naturales. Aunque los griegos descubrieron los números irracionales, eso planteó una profunda crisis en su filosofía, y era mucho más agradable pensar en los cielos gobernados por estos números especiales.

7. Conclusiones

En esta actividad hemos construido varios modelos. Un modelo, en el sentido matemático, es una representación simplificada de la realidad que nos permite explorar y comprender un sistema.

El primer modelo que hicimos tenía los tres cuerpos moviéndose en el mismo plano. Refinamos ese modelo haciendo que la Luna orbite en un plano diferente al del Sol. En la última parte, incluimos la inclinación axial de la Tierra y mencionamos varias mejoras que podemos considerar para hacer que el modelo sea más preciso.

Un modelo se basa en observaciones de la naturaleza y propone un mecanismo "como si" la naturaleza lo siguiera. En la sección 3, calculamos el mes sinódico a partir del mes sidéreo. Sin embargo, ambos podemos medirlos directamente desde la naturaleza: observando la posición de la Luna con respecto a las estrellas, medimos el mes sidéreo. Observando las fases de la Luna (es decir, su posición con respecto al Sol), medimos el mes sinódico. ¿Estas observaciones coinciden con el valor calculado? ¡Sí! Esto valida el modelo ya que la Luna se comporta *como si* girase alrededor de la Tierra en un círculo, a una determinada velocidad constante. Excepto que... en realidad, ¡las observaciones **no** coinciden con los cálculos si medimos con suficiente precisión! Esto revela que el modelo está incompleto. Luego tenemos que refinar y decir que en realidad la órbita no es exactamente un círculo sino una elipse, y la velocidad alrededor no es exactamente constante sino que es más rápida en la parte de la elipse que está más cerca de la Tierra. Las leyes de Newton proporcionan un modelo más refinado de los cielos, que describe las órbitas y las fuerzas entre los cuerpos celestes. Sin embargo, las leyes de Newton no pueden explicar todos los fenómenos astronómicos y, en algún momento, tendremos que utilizar la teoría de la relatividad de Einstein. Y así sucesivamente. Todavía hay fenómenos que esperan ser explicados por un buen modelo. Esto no significa que los modelos más simples sean incorrectos o inútiles. Todavía proporcionan una buena visión general, conocimientos y aproximaciones a la realidad. Los modelos más refinados son más precisos y brindan información más profunda.

Recursos

- Aplicación de fases lunares y eclipses: <https://imaginary.github.io/moonphaseseclipses>

¡Crea y comparte!

Comparte los hallazgos de los participantes usando los hashtags **#idm314eclipses** y **#idm314**.

© 2024 Christiane Rousseau, Daniel Ramos

Este trabajo está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).