



Pavimentações artísticas

Esta atividade oferece um guia “passo a passo” para criar pavimentações artísticas. Depois de compreender como funcionam estes exemplos, será encorajado a criar as suas próprias pavimentações únicas.

Participantes:

A partir dos 8 anos de idade, dependendo da atividade.

Não são necessários conhecimentos prévios de Matemática, mas à medida que avança nas atividades, poderá ser necessário aplicar alguns conceitos matemáticos. Estes conceitos incluem formas como polígonos, triângulos, quadriláteros e hexágonos, bem como noções tais como a de lados paralelos, translação, rotação e simetria axial.

Preparativos:

Papel, lápis, borracha, lápis de cor ou tesoura e papel colorido.

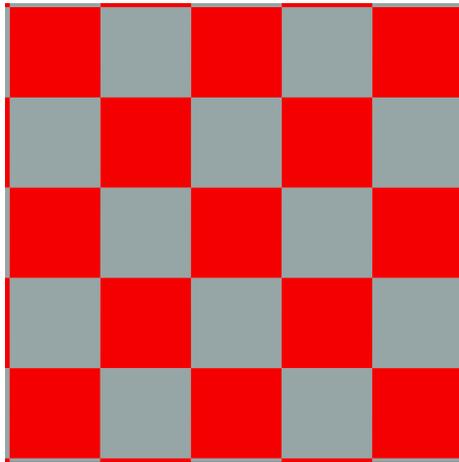
Se as crianças tiverem acesso a tablets ou computadores e à internet, podem criar pavimentações nalgum software (por exemplo, <https://tiled.art>, que é gratuito).

Atividade 1: Pavimentações usando apenas translações.¹

a. Pavimentações com quadriláteros. (a partir dos 8 anos)

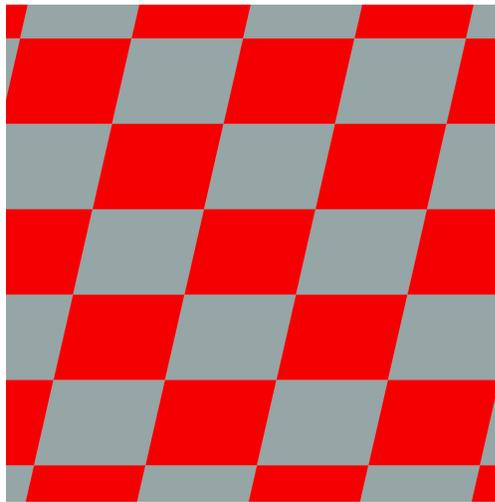
O primeiro passo é reconhecer que um quadrado (4 lados) pode revestir o plano inteiro num padrão que se repete. Isto significa que podemos dispor ladrilhos quadrangulares de modo a preencherem completamente o plano sem quaisquer espaços ou sobreposições dos ladrilhos.

¹ As pavimentações desta atividade foram feitas com a ferramenta <https://tiled.art>

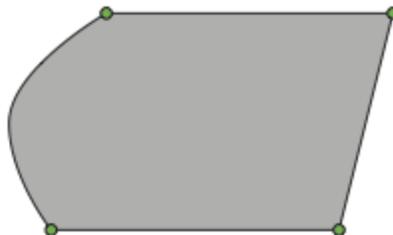


Note que os ladrilhos têm pares de lados paralelos e iguais. Nestas pavimentações, os cantos dos ladrilhos encontram-se alinhados e ligados uns aos outros. E em todas as atividades abaixo, vamo-nos centrar em pavimentações nas quais os cantos dos ladrilhos estão ligados uns aos outros.

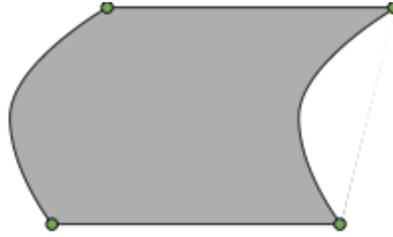
Os quadrados podem ser transformados em formas irregulares com o mesmo número de lados e continuar a revestir o plano num padrão que se repete, desde que se mantenham os lados paralelos e de igual comprimento. A forma resultante é designada por *paralelogramo*.



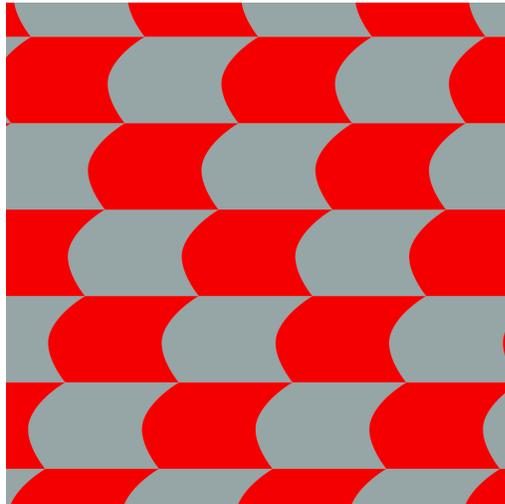
Agora, crie uma pavimentação do tipo que se segue, começando por seleccionar um ladrilho cinzento. Considere um lado do ladrilho, por exemplo o lado esquerdo, e curve-o, assegurando-se de que os extremos da curva permanecem os mesmos que os do segmento de reta original.



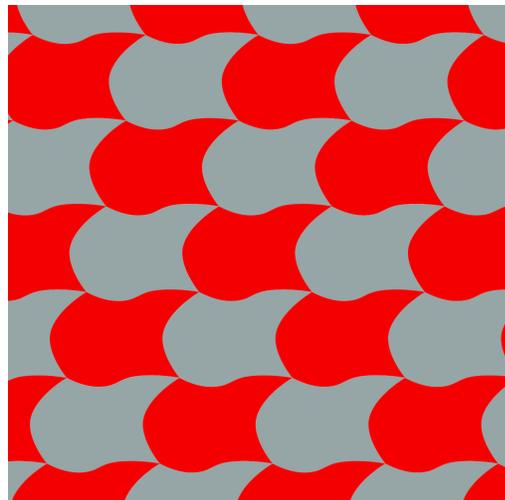
Já não é possível pavimentar o plano com estes ladrilhos, porque o lado esquerdo de um ladrilho já não coincide com o lado direito de outro ladrilho. Para que seja possível pavimentar o plano novamente, a mesma deformação deve ser aplicada ao lado direito, desde que se garanta que os extremos também permanecem os mesmos.



Isto dá-nos uma nova pavimentação:

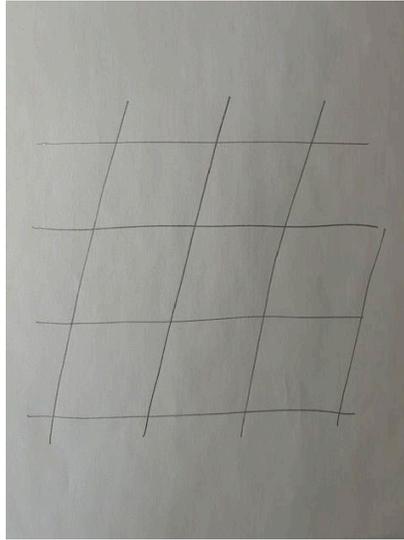


Pode fazer o mesmo com os lados da outra direção, substituindo-os por uma curva com os mesmos extremos.

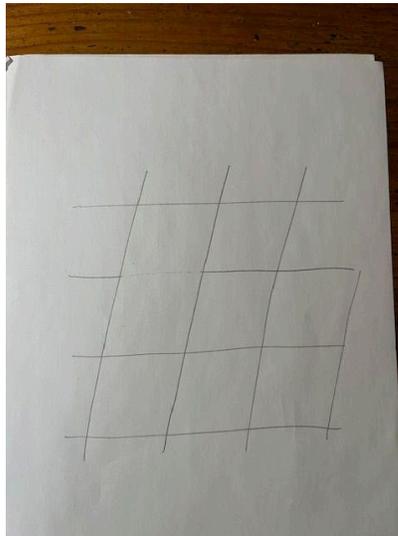


- Explique porque é que este processo funciona.
- Crie as suas próprias pavimentações. Comece por desenhar a pavimentação inicial com um lápis e use a borracha para transformar os segmentos em curvas.

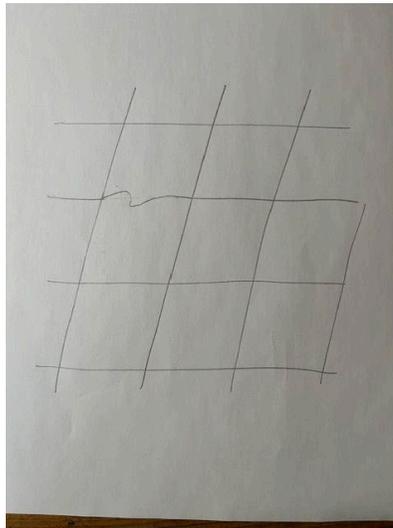
Comece com uma grelha,



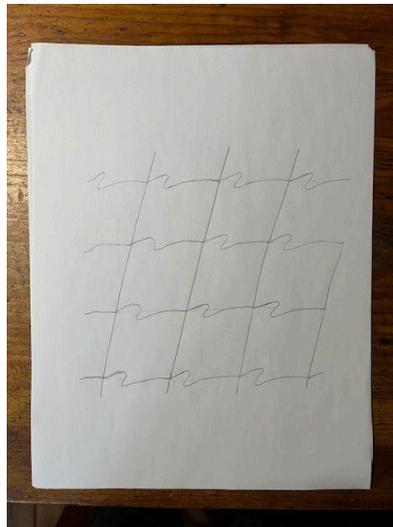
Depois apague um dos lados.



Substitua-o por qualquer curva com os mesmos extremos.

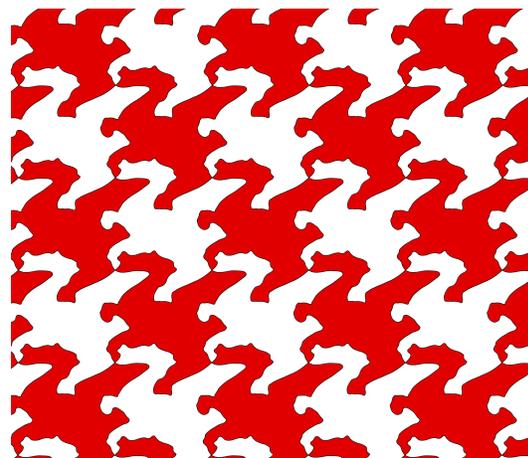


A seguir, substitua todos os segmentos paralelos pela mesma curva.



Repita o processo na outra direção.

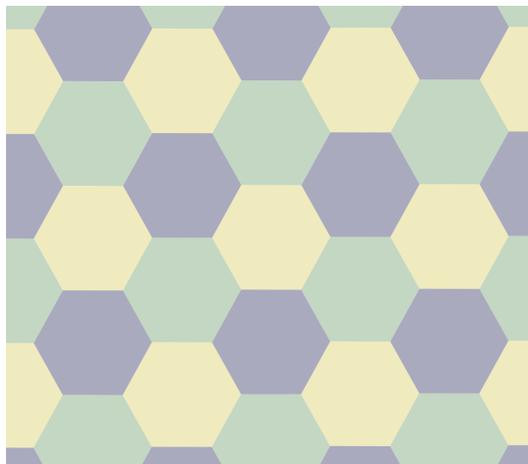
Depois, pode colorir os ladrilhos. Em alternativa, pode recortar com uma tesoura os ladrilhos a partir de folhas de papel coloridas e encaixá-los. Aqui está um exemplo de uma pavimentação com cavalos voadores, inspirado numa gravura do artista M.C. [Escher's print](#), na qual os ladrilhos originais são quadrados.



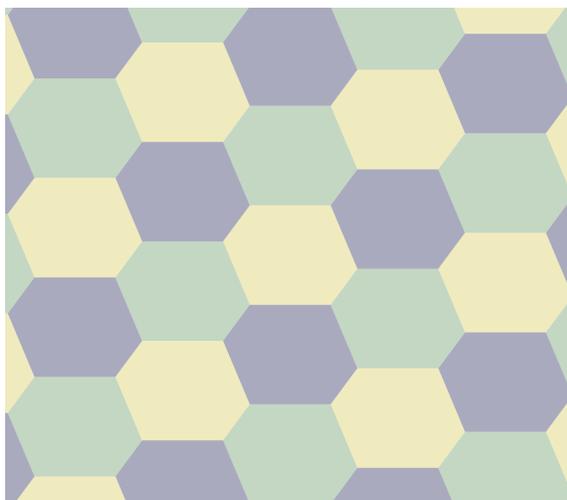
- Consegue criar uma pavimentação em que os ladrilhos tenham a forma de algo na natureza (como uma planta, animal, ou parte de uma planta) ou de um objeto reconhecível?

b. *Pavimentação Hexagonal.* (Idade: 12 anos ou mais)

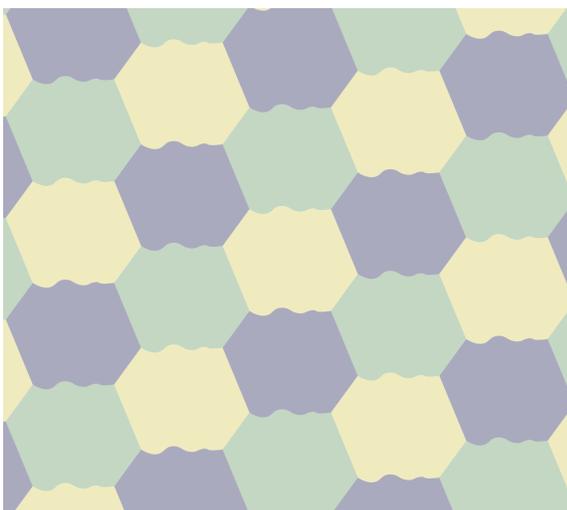
Neste caso, o hexágono regular (6 lados) pode revestir o plano num padrão que se repete.



Repare que cada ladrilho tem três pares de lados paralelos e iguais e, mais uma vez, os cantos dos ladrilhos estão alinhados e ligados. Estes hexágonos regulares podem ser transformados em hexágonos irregulares (polígonos com 6 lados) e continuar a revestir o plano num padrão que se repete, desde que os lados paralelos permaneçam paralelos e de igual comprimento.



Agora, considere um qualquer lado de um ladrilho e curve-o, mantendo as mesmas extremidades do segmento de reta original. Se quiser pavimentar o plano com este novo ladrilho, deve seguir a mesma regra anterior: aplique a mesma deformação ao lado paralelo do que acabou de curvar. Isto resultará numa nova pavimentação.



Agora, e dado que existem três pares de lados paralelos, pode aplicar o mesmo processo aos outros dois conjuntos de lados paralelos, curvando os do mesmo conjunto da mesma forma e mantendo os extremos fixos. Isto criará uma nova pavimentação deformada.



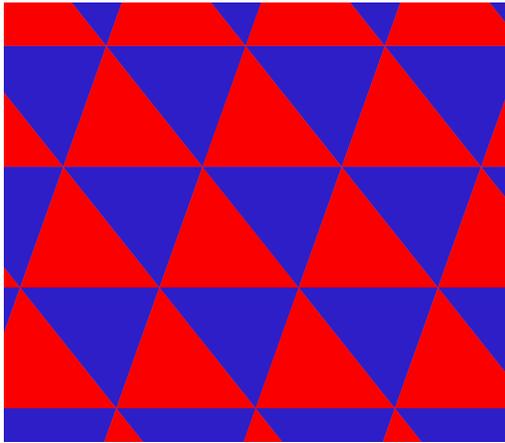
- Explique porque é que este processo funciona.
- Crie as suas próprias pavimentações. Comece por desenhar o ladrilho inicial com um lápis e utilize uma borracha e o lápis para transformar as linhas retas em curvas. A seguir, pode colorir os ladrilhos. Em alternativa, pode recortar com uma tesoura os ladrilhos a partir de folhas de papel colorido e encaixá-los.
- Consegue criar uma pavimentação em que os ladrilhos tenham a forma de algo na natureza (como uma planta, um animal, parte de uma planta), ou de um objeto reconhecível?

Atividade 2: Pavimentações com rotações de 180°.²

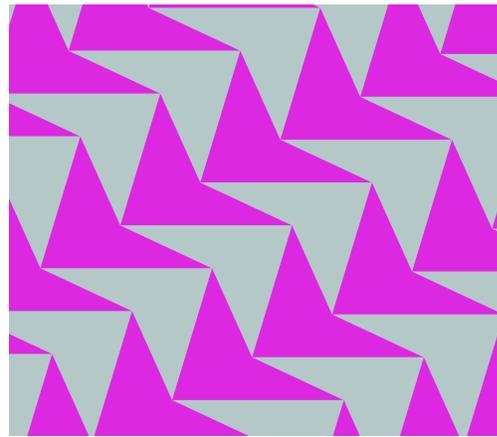
c. Ladrilhos triangulares ou em forma de quadriláteros. (Idade 12 anos ou mais)

² As pavimentações desta atividade foram feitas com a ferramenta <https://tiled.art>.

O primeiro passo é perceber que qualquer triângulo ou quadrilátero (um polígono com quatro lados) pode pavimentar o plano quando são permitidas rotações de 180 graus dos ladrilhos, para além de translações.



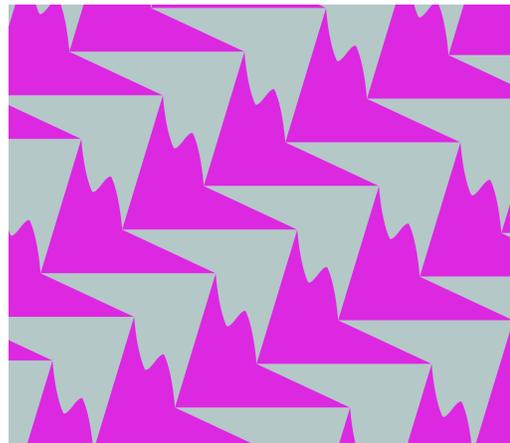
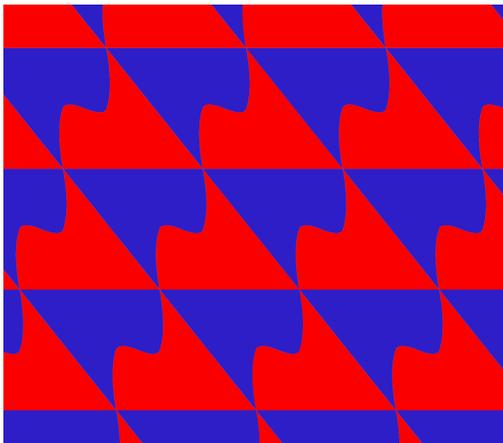
Pavimentando com triângulos



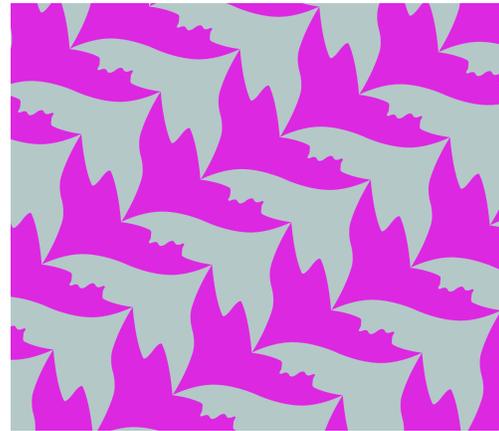
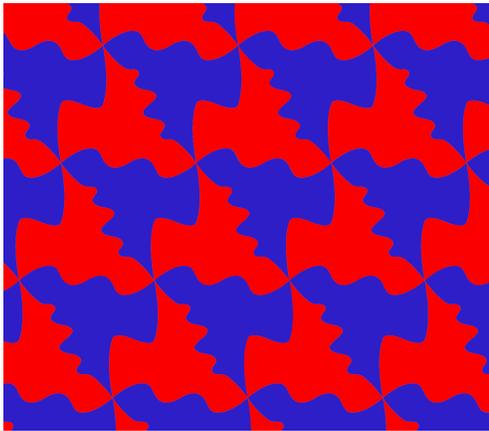
Pavimentando com quadriláteros

Agora, comece por qualquer uma destas pavimentações, considere um ladrilho e selecione um lado. Deforme este segmento de reta numa curva mantendo os mesmos extremos.

- Atenção: não pode mudar o lado de qualquer forma, se quiser que os ladrilhos continuem a encaixar-se de modo a revestirem o plano. O lado curvo de um ladrilho tem de coincidir com o lado curvo rodado do ladrilho ao lado. Isto significa que o lado curvo tem de ter o mesmo aspeto se o rodarmos 180 graus em torno do ponto médio do lado. Em particular, conclui-se que não se pode mover o ponto médio do lado. Seguindo esta regra, obtém-se uma nova pavimentação.



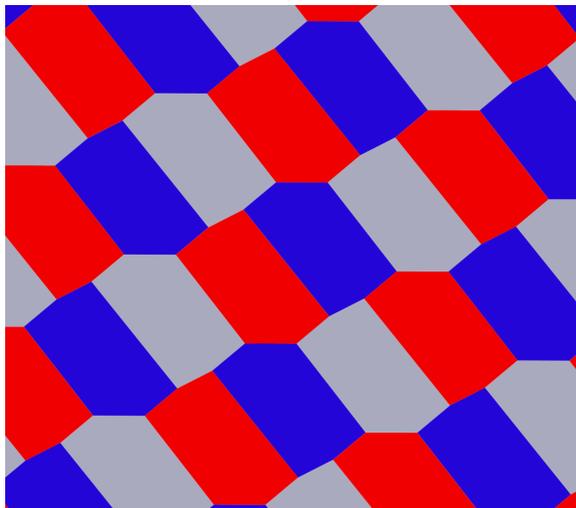
Pode fazer o mesmo com os outros lados de direções diferentes. Basta aplicar a mesma regra: curve os lados, certificando-se de que coincidem com os lados rodados dos ladrilhos adjacentes.



- Consegue explicar porque é que este processo funciona e porque é que as curvas que substituem os lados têm de ser simétricas em relação ao seu centro?
- Crie as suas próprias pavimentações.
- Consegue criar uma pavimentação em que os ladrilhos têm a forma de algo na natureza (como uma planta, animal ou parte de uma planta), ou de um objeto reconhecível?

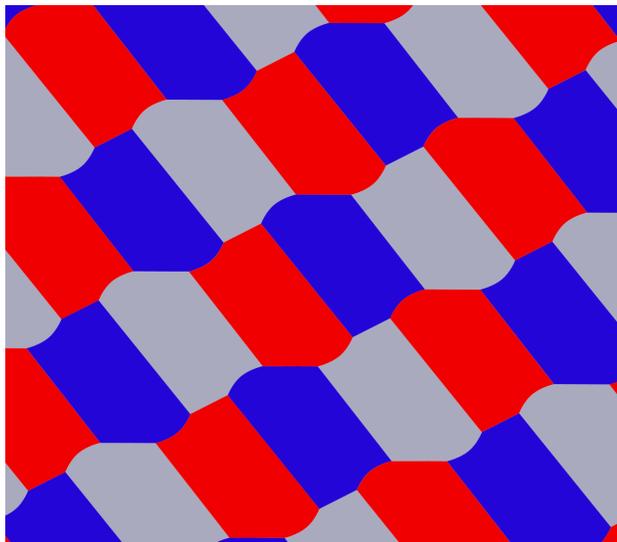
d. *Pavimentação hexagonal.* (Idade 14 anos ou mais)

Uma forma de criar estas pavimentações começa com hexágonos (polígonos com seis lados) que têm um par de lados opostos paralelos com o mesmo comprimento.³

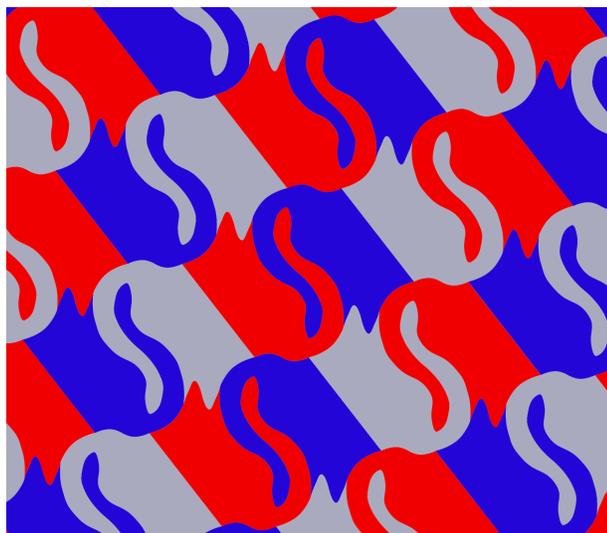
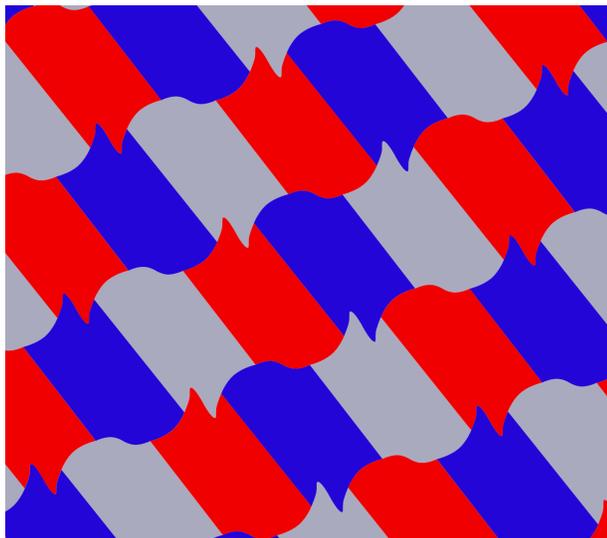


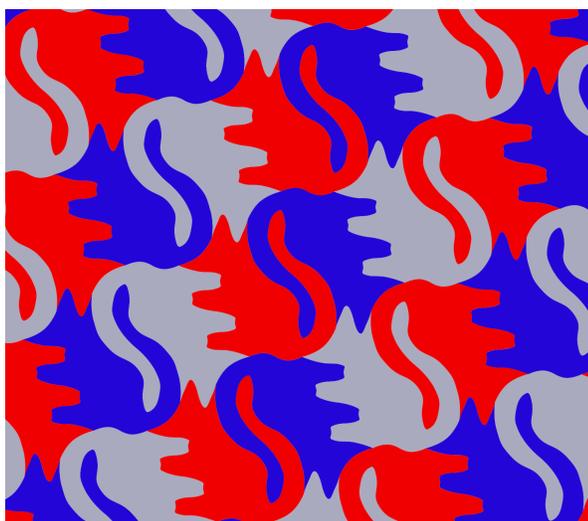
Os lados paralelos e iguais podem ser substituídos por quaisquer duas curvas paralelas e iguais, desde que os extremos permaneçam os mesmos.

³ Este método foi idealizado pelo Matemático John Conway.



Cada um dos outros quatro lados pode ser substituído por qualquer curva que seja simétrica em torno do centro do lado, mantendo os mesmos extremos. Aqui estão os passos a seguir:



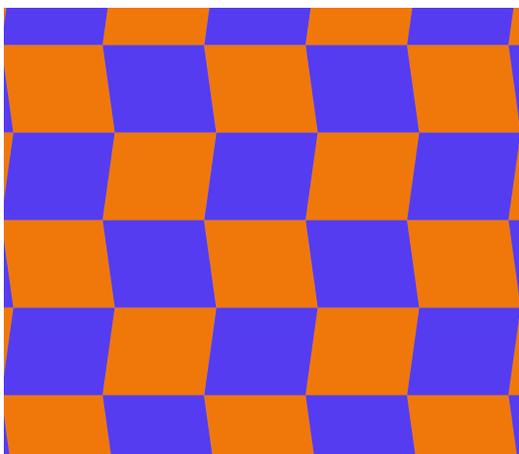


- Explique os passos deste método.
- Na pavimentação original com hexágonos, há três hexágonos adjacentes a cada vértice. É por isso que a pavimentação pode ser colorida com três cores diferentes.
- Crie as suas próprias pavimentações.

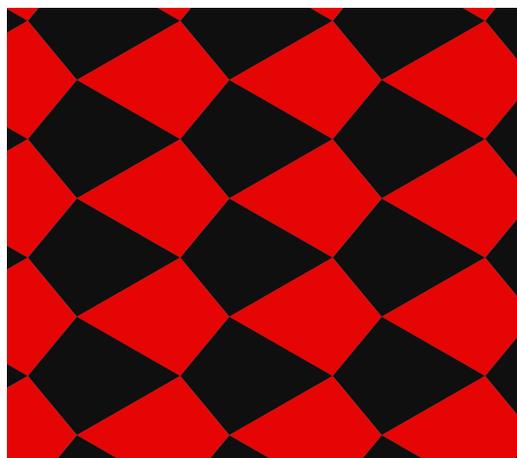
Atividade 3: Pavimentações com “inversões”.⁴ (Idade 14 anos ou mais)

Utilizaremos ladrilhos que podem pavimentar todo o plano, com metade deles “invertidos” (como se tivessem sido refletidos numa reta) juntamente com translações. Há dois tipos de polígonos de quatro lados (quadriláteros) em que isto funciona: os *paralelogramos*, nos quais os lados opostos são paralelos, e os *papagaios*, que têm dois pares de lados adjacentes iguais. No caso dos paralelogramos, cada par de lados paralelos é designado por “par gémeo”. Nos papagaios, cada par de lados adjacentes é também chamado “par gémeo”.

Os paralelogramos e os papagaios formam pavimentações como as das imagens seguintes:



Pavimentação com paralelogramas



Pavimentação com papagaios

⁴ As pavimentações desta atividade foram feitas com a ferramenta <https://tiled.art>.

Repare que (se não houvesse cor no 1º caso), em ambos os casos, existiriam eixos de simetria paralelos (horizontais nas imagens): chamaremos direção de inversão à direção destes eixos. A direção perpendicular (vertical nas figuras) será designada por direção de deslizamento.

Em qualquer caso, quando se deforma um lado numa curva, é necessário deformar também o seu lado gémeo de forma correspondente. Para o fazer, há duas transformações possíveis:

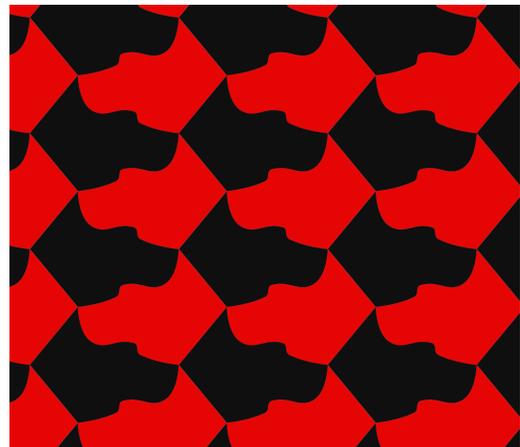
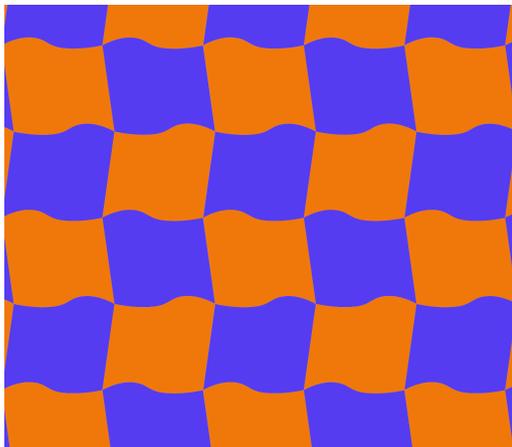
- Translação ao longo de uma direção.
- Reflexão deslizante ao longo de uma direção. Uma reflexão deslizante é uma reflexão seguida de uma translação (ambas na mesma direção).

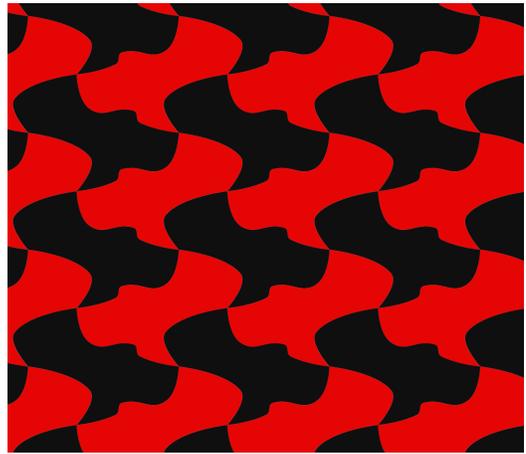
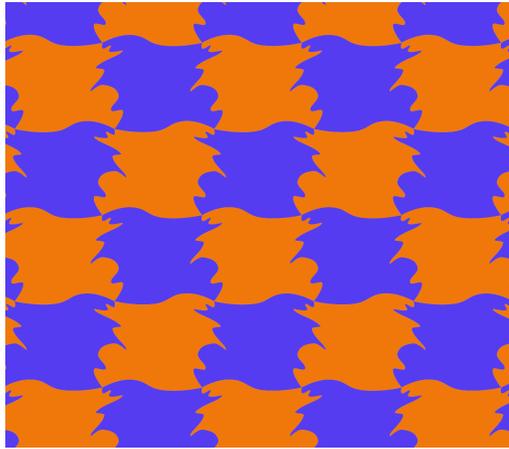
Se escolhermos um paralelogramo e deformarmos um lado paralelo à direção de inversão, então modificamos o seu gémeo por uma reflexão deslizante na direção de deslizamento.

Se escolhermos um paralelogramo e deformarmos um lado que não é paralelo à direção de inversão, modificamos o seu gémeo por uma translação na direção de inversão.

Se escolhermos um papagaio, para qualquer lado que deforme, devemos modificar o lado gémeo correspondente por uma reflexão deslizante na direção de deslizamento.

Na imagem abaixo, é aplicada, respetivamente, uma reflexão deslizante e uma translação a dois lados deformados do paralelogramo:





- Discuta porque é que este processo funciona.
- Crie as suas próprias pavimentações.

Atividade 4: Pavimentações com outros tipos de simetrias. (Idade 14 anos ou mais)

Há muitas maneiras diferentes de criar pavimentações utilizando formas que se repetem num padrão, com diferentes tipos de simetrias. Pode tentar criar as suas próprias pavimentações, fazendo experiências com formas e simetrias ou pode visualizar alguns exemplos no site: <https://tiled.art>.

Fundamentos matemáticos e recursos:

<https://tiled.art>

<https://en.tessellations-nicolas.com/method.php>

Crie e Partilhe!

Partilhe as descobertas dos participantes utilizando as hashtags **#idm314tilings** e **#idm314**.

© 2024 Christiane Rousseau

Este trabalho está licenciado sob uma Licença [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).