



艺廊问题 & 堡垒问题

参与者:

年龄为10至12岁及以上, 无需先备数学知识。

前置工作:

印出范本

四支不同颜色的铅笔(例如, 红色、绿色、蓝色、黄色)

空白纸张, 供参加者创建自己的艺廊

也可使用彩色粉笔在学校操场或街道上进行户外活动

活动 1. 用摄影机监控艺廊内部

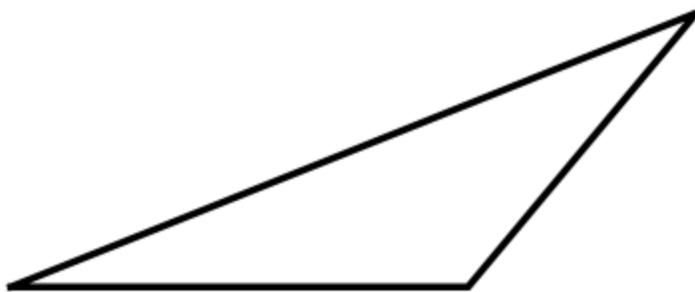
想像一下, 你身处于一个充满惊人艺术品的艺廊中。这个艺廊的平面不像一般的矩形或正方形, 而是有着很奇特的形状, 有许多拐角和转折。这个形状是由相交的直线构成的(数学上称之为多边形)。你的任务是在艺廊的特定位置战略性地放置监视用的摄影机, 以确保艺廊中的每个地方都能被看到并受到监视。但这里有一个难题: 这些摄影机只能放置在艺廊的拐角处。

你的任务是使用最少数量的监控摄影机, 以便艺廊中的每个地方都受到监视。这就是所谓的「艺廊问题」。

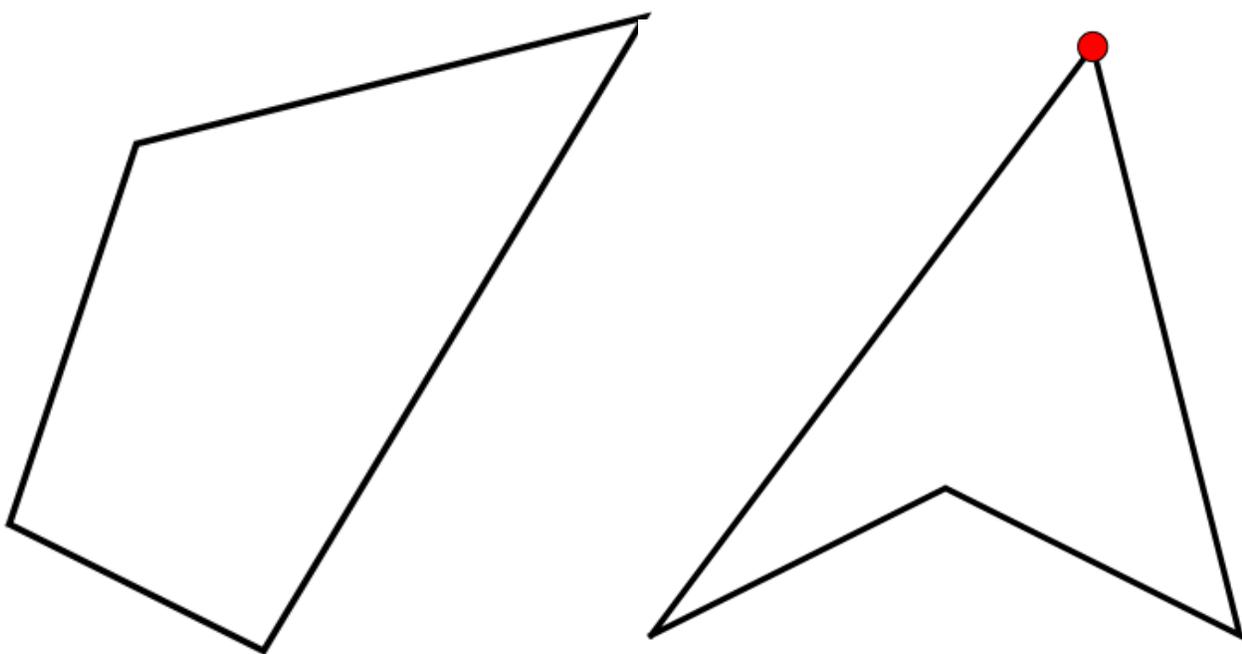
你可以使用铅笔, 从摄影机开始画出直线, 追踪摄影机可以看到的区域。请记住, 摄影机无法穿透墙壁。可以先使用直尺辅助观察摄影机可以覆盖哪些区域。

1. 让我们从一些简单的情况开始探讨这个问题:

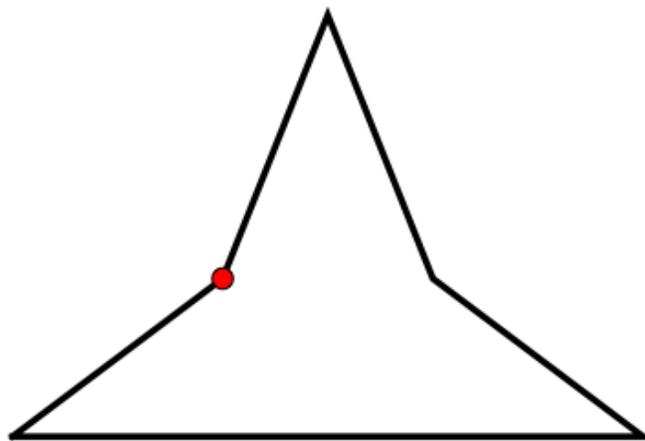
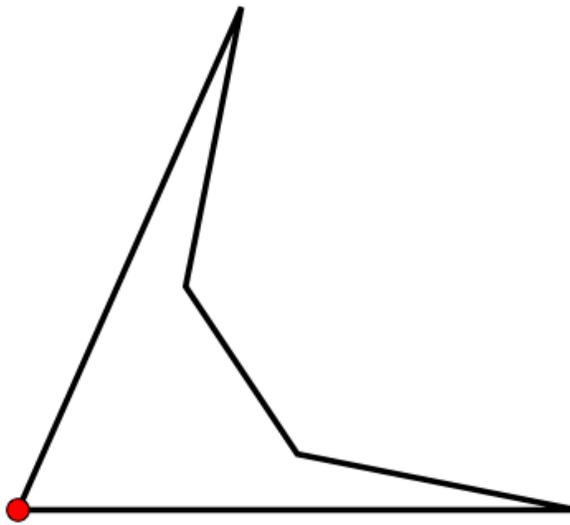
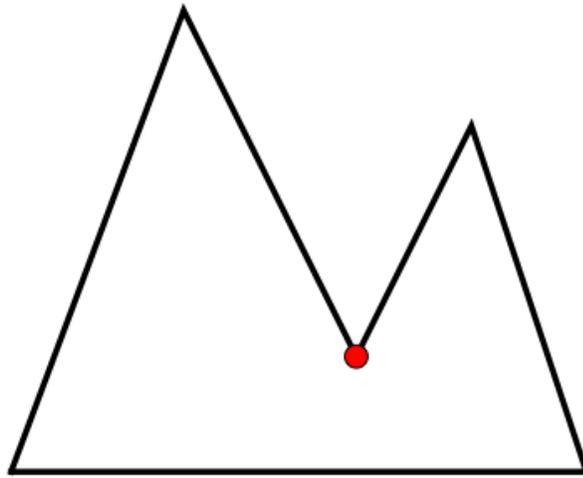
- 对于一个三角形格局的艺廊, 我们只需要一台摄影机, 可以放置在任何一个拐角, 也就是三角形的顶点, 如下所示:



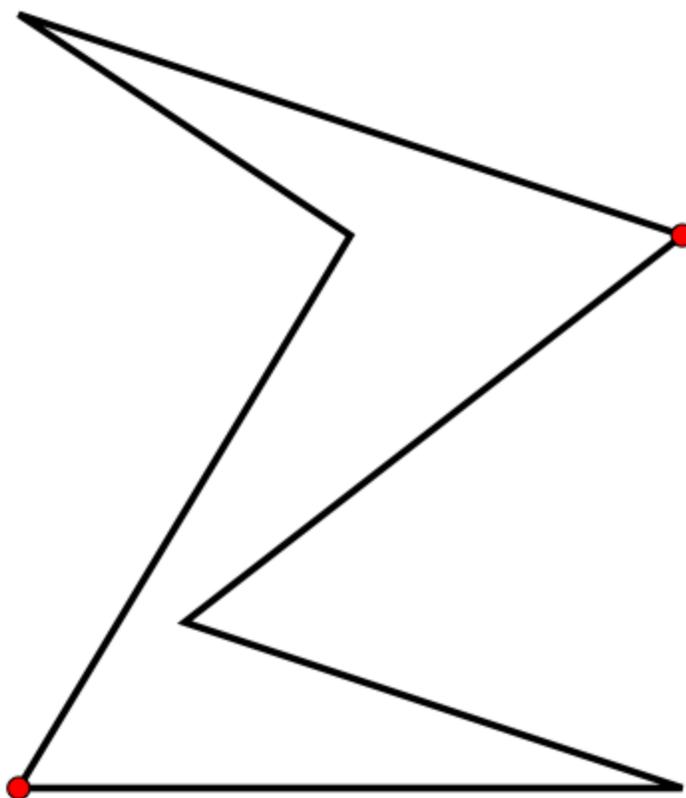
- 四边形艺廊同样也只需要一台摄影机。如果它是一个形状简单、拐角朝外的形状("凸形")，可以将摄影机放置在任何一个拐角，请参见左侧的图片。如果室内格局更加复杂，有一些拐角朝内("凹形")，则必须更谨慎地选择摄影机的位置，以覆盖所有区域，请参见右侧图片中的红点。对于右侧的艺廊，还有可能找到第二个摄影机的位置。你能找到它吗？



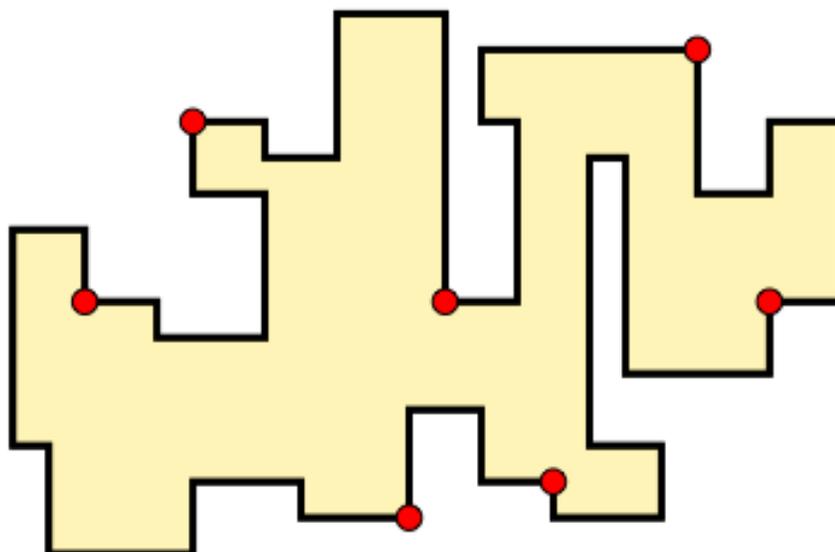
- 在一个五边形艺廊中，同样只需要一台摄影机。总是可以将一台摄影机放置在一个特殊的拐角，不论五边形长怎样，从那个拐角你可以看到整个艺廊的内部。请参见下面的图片：



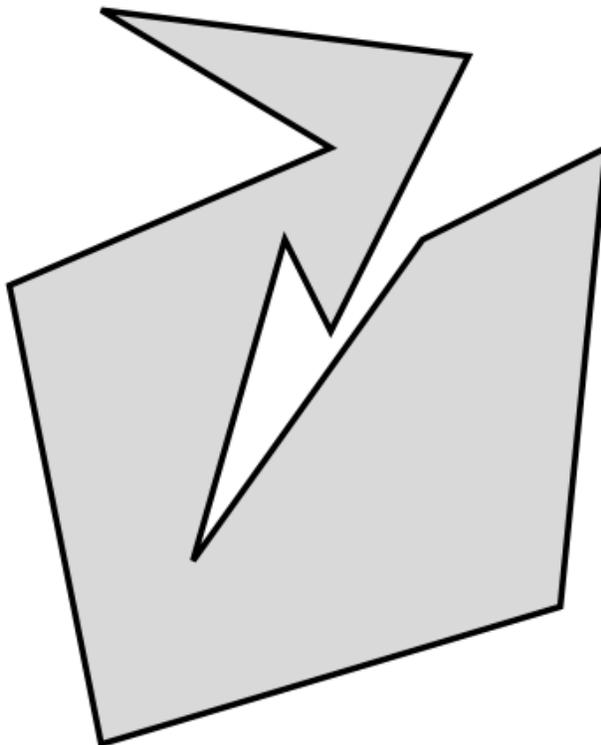
- 然而，在六边形艺廊中，你可能需要两台摄影机，如下图：



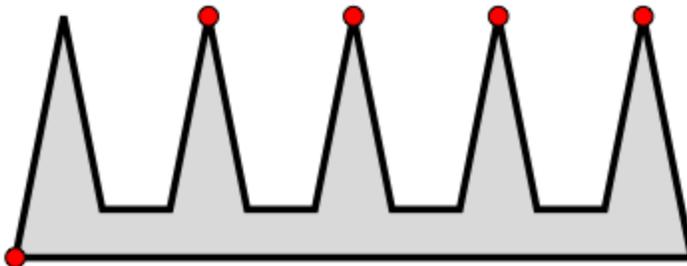
- 下方这个艺廊至少需要 7 台摄影机：



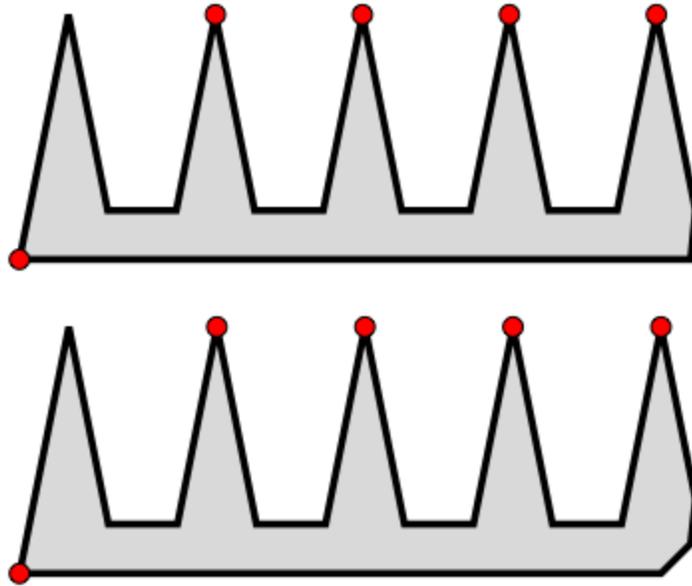
- 你能只用两台摄影机监控这整间艺廊吗?



2. 现在我们转到一个更数学的面向来探讨, 多边形的边数和所需要的摄影机数量的关系。在下面这个具有15个边的艺廊中, 你至少需要5台摄影机才能完全覆盖整间艺廊, 下图是一种设置方式。



而只有 4 台摄影机是绝对办不到的, 因为你不可能有一台摄影机能够同时观看到上方五个尖点里面的两个, 因此光是监控这五个尖点就至少需要 5 台摄影机。同样的情况也会发生在下面的 16 边形和 17 边形格局的艺廊。



请注意, 5是15、16或17除以3的商。

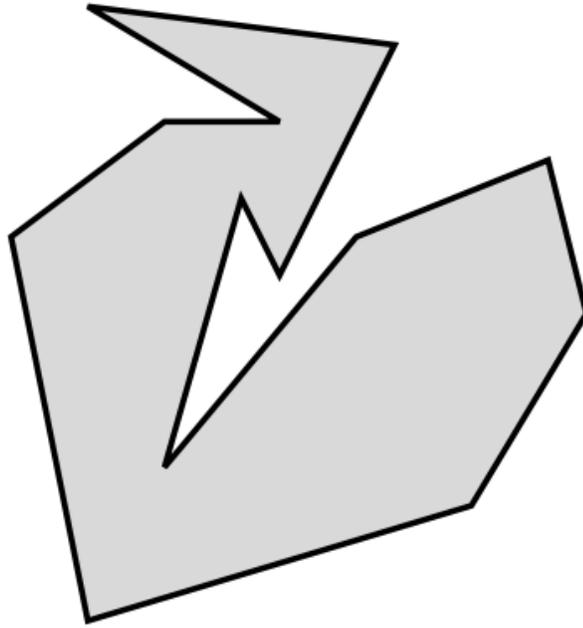
重新查看上面的所有例子, 检查在每种情况下, 你是否可以用不超过边数除以3的商这个数量的摄影机来观看整个艺廊。

数学家 Václav Chvátal 在 1975 年证明了

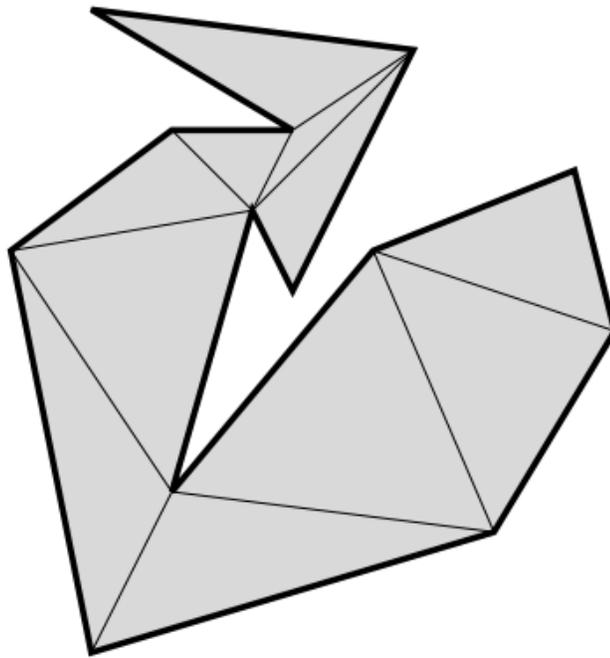
摄影机数量等于边数除以3的商对于任何艺廊都是足够的!

举例来说: 对于六边形艺廊, 需要 2 台摄影机, 对于十边形艺廊, 需要 3 台摄影机, 对于 23 边形艺廊, 需要 7 台摄影机。有趣的是, Chvátal 的规则允许你把摄影机放在艺廊内部仍然有效, 而不限限制放在角落。因此, 这对要在复杂形状的地方设置监视摄影机来说是很有用的指南。

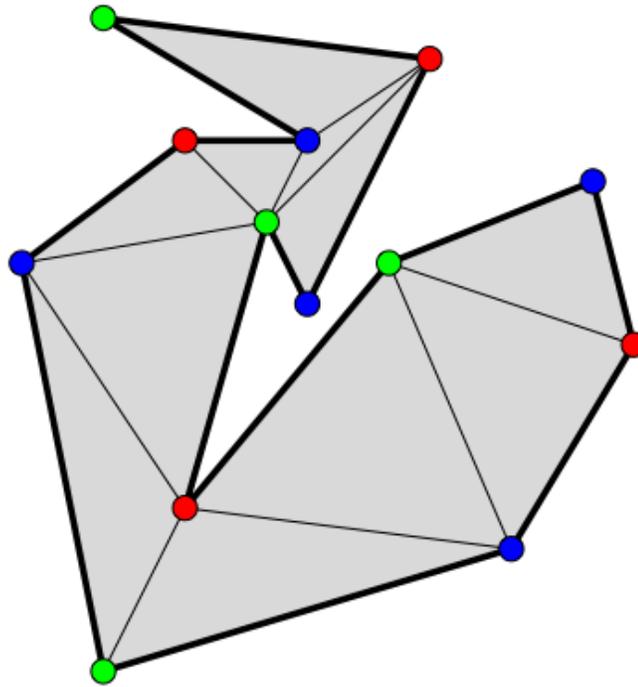
3. 1978年, 数学家 Steve Fisk 提出了一个比 Václav Chvátal 更简单而优雅的证明。他提供了一个演算法, 或者说是一个按部就班的指令, 来确定每个摄影机应该放置的位置。让我们仔细看看这个演算法在下面艺廊中是如何运作的。



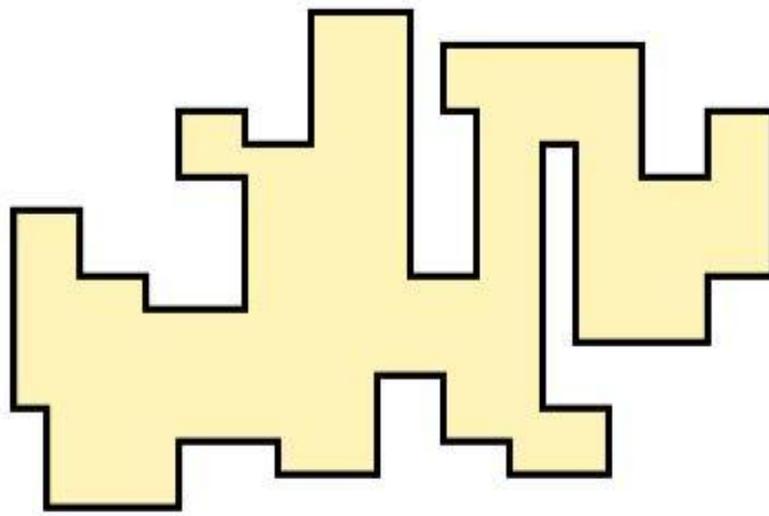
- 第一步是将我们的艺廊划分为三角形。这些三角形的角落位置与原始艺廊的角落必须相同：

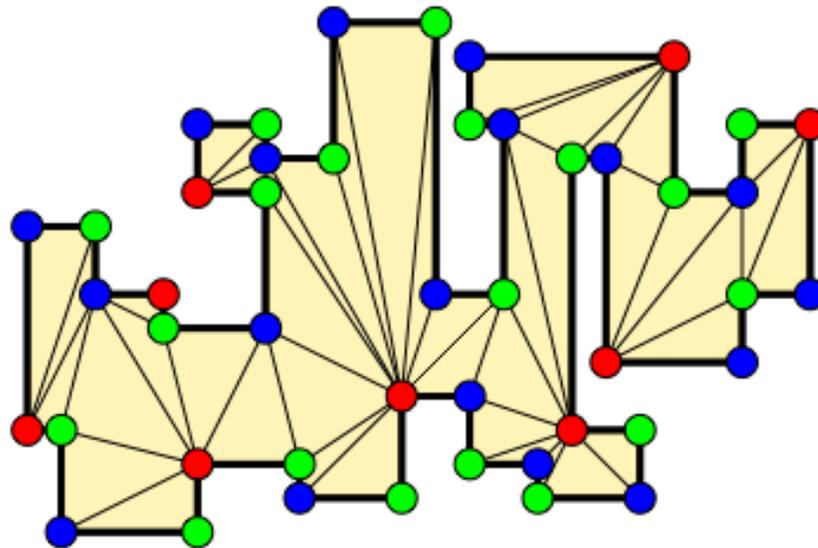
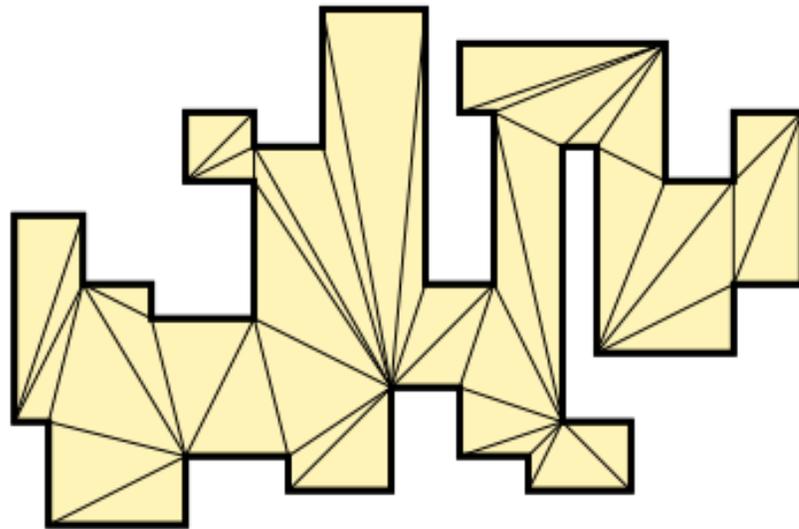


- 接下来的步骤是为每个角落分配三种颜色中的一种(假设是红色、绿色和蓝色), 让每个三角形的顶点都具有三种不同的颜色(这总是可能的)。



- 选择出现最少次数的颜色。在这个例子中，红色有 4 个点，绿色有 4 个点，蓝色有 5 个点。所以，有两种选择，我们可以选择 4 个红点，通过在这些红点处放置摄影机来解决问题。我们也可以在 4 个绿点处放置摄影机。在这两种情况下，4 台摄影机足以观察到所有区域。
- 来看一个更复杂的例子:

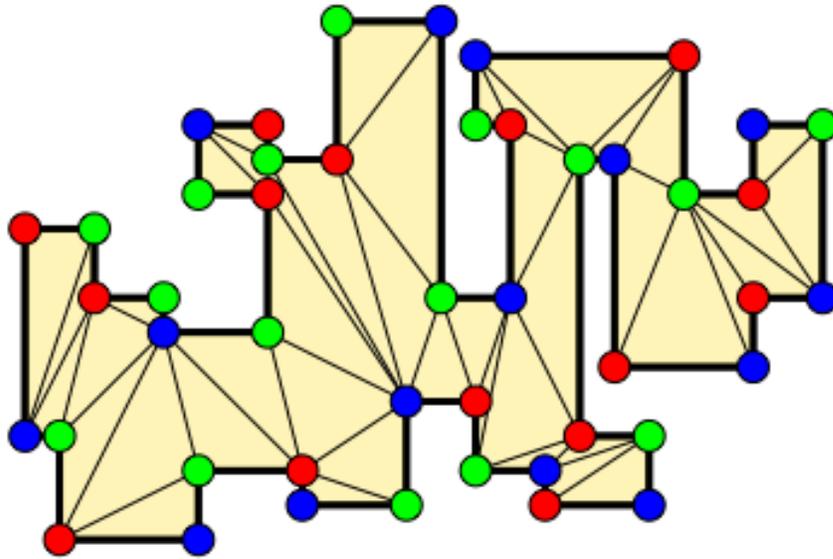




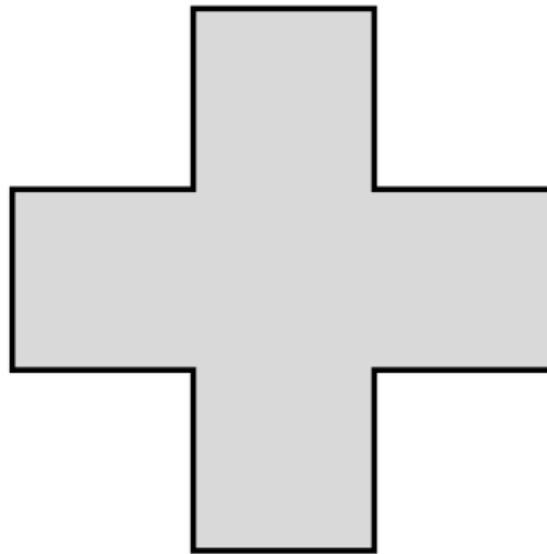
在这个例子中，我们有 9 个红点，18 个蓝点，和 19 个绿点。因此，通过在这 9 个红点处放置摄影机，就能解决这个问题。

有趣的是，『三角划分并不唯一』。下面是相同艺廊的图片，但与之前的图片中的三角形划分不同。这意味着有不同的方法可以将一个艺廊划分为三角形。对于不同的三角形，每个三角形的角的颜色也不尽相同。

换句话说，用这个演算法，对于一个艺廊，可能仍有许多个放置摄影机的解。在下面的新三角划分中，有 15 个红点，15 个蓝点和 16 个绿点。因此，需要 15 台摄影机，可以放置在红点或蓝点。这个解决方案明显不如之前的解决方案。因此，Fisk 的演算法提供了解决方案，但可能不是最优的。

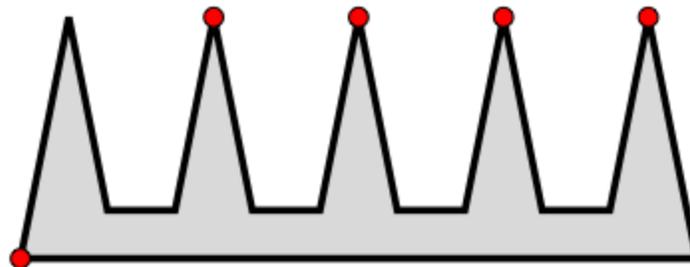


- 寻找不同方法将这个多边形划分为三角形, 并在每种情况下探索摄影机的放置。



事实上, 有比演算法更好的方案, 只需要一台摄影机。你能做到吗?

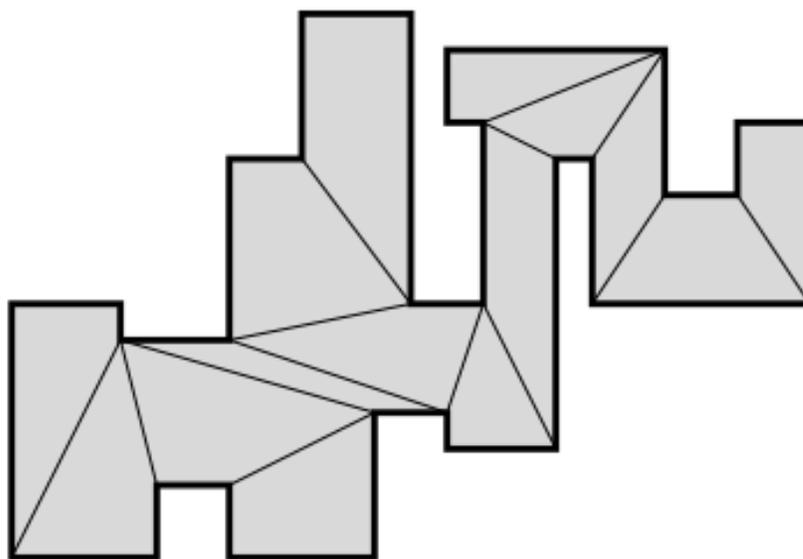
- 画出下图的三角化, 并且让演算法能提供符合的解答(其中三角形可能很细):



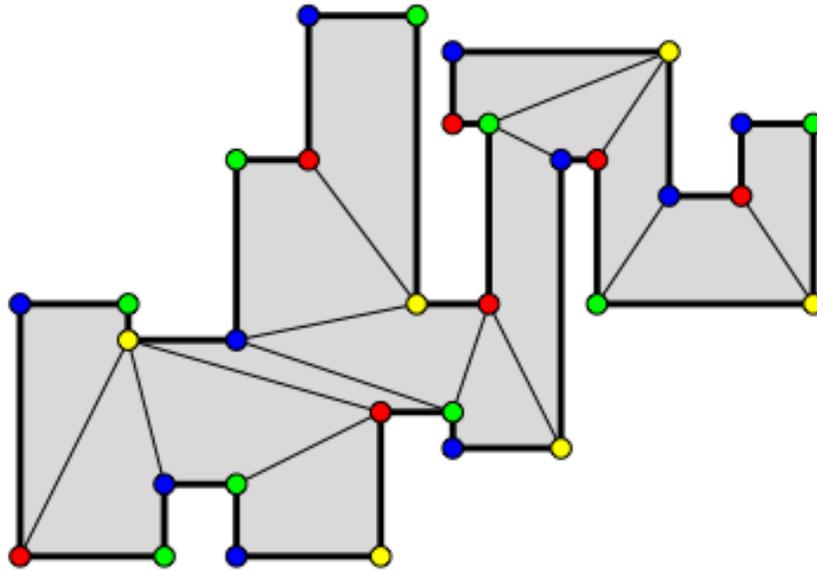
4. 试着创作自己的创意艺廊，并且利用演算法探索摄影机的摆设方法。
5. 在 1980 年，Jeff Khan、Maria Margaret Klawe 和 Daniel J. Kleitman 针对直角艺廊，也就是每个拐角都是 90 度的艺廊，找到了更有效率的方法。与之前情况类似，你会使用一定数量的摄影机来监控艺廊内部的整个区域，然而直角艺廊所需的摄影机数量与一般艺廊的情况不同。在这里，你不是将边数除以 3 (如前所述)，而是除以 4，然后舍去小数取商值。因此，如果你的艺廊有 20 个边，你可以确定至多 5 台摄影机就足够。如果你的艺廊有 8 个边，至多 2 台摄影机就足够了。由于四分之一小于三分之一，这意味着一般而言仅包含直角的艺廊需要的摄影机较少！

这里的基本想法与我们之前讨论的类似。我们再次希望将艺廊划分为较小的形状。但由于我们的艺廊具有仅包含直角的特殊性质，现在可以将其划分为四边形，并且让这些四边形是『凸四边形』，就是角不向内凹的形状。这种划分为四边形的方式在一般形状的艺廊是不一定保证成功的！

这些凸四边形的角必须位于艺廊的拐角。虽然这种划分并没有直观的方法能展现和证明，但它能让你用更少数量的摄影机有效地覆盖直角艺廊的整个内部。



你可以使用四种颜色来染色这些四边形的角，确保每个角获得不同的颜色，并确保每个四边形的四个角都使用了四种颜色。

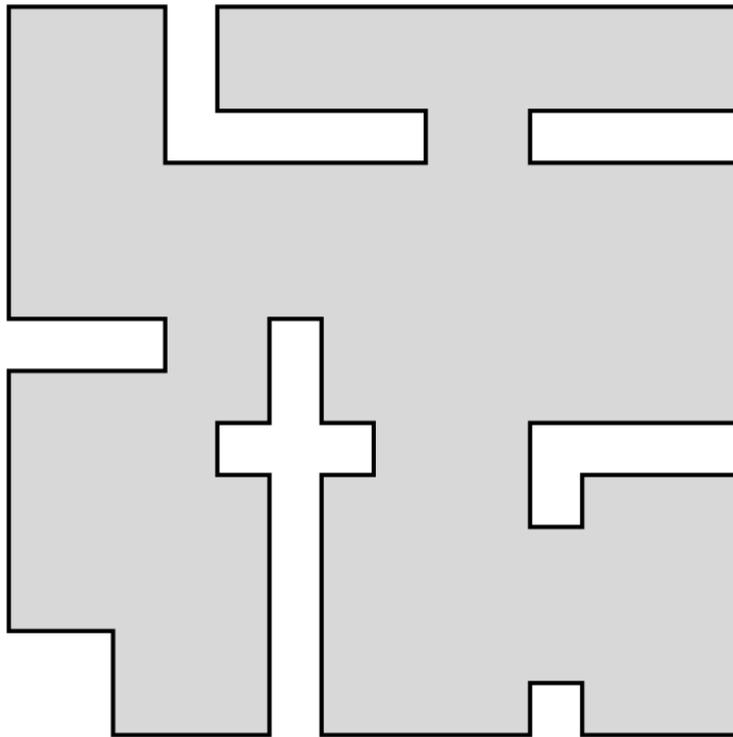


有 6 个黄色角, 7 个红色角, 9 个绿色角和 10 个蓝色角。

请记住, 放置在凸四边形的任何角落的摄影机可以监视整个四边形。

因此, 我们只需将摄影机放置在黄色角即可, 由于现在我们使用了四种不同的颜色而不是三种, 这使我们仅需要更少数量的摄影机, 就能够监控到每一个地方。

试着在下图执行这套方法:

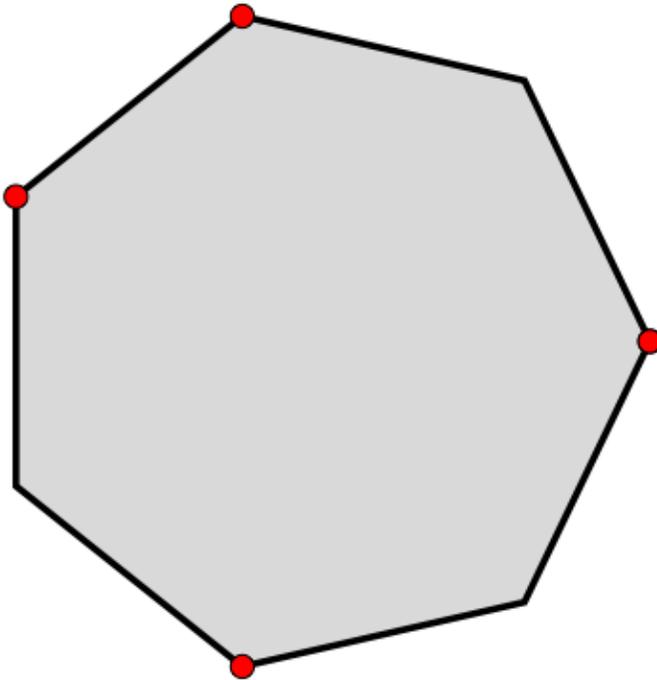


试着创作其他有趣的直角艺廊, 并使用同样方法来设置摄影机。

活动2. 用摄影机监控堡垒外部

想像一下有一座堡垒，它的形状是一个由直边和角形成的封闭图形。这里的挑战是要找出在堡垒内放置摄影机(或守卫)的方式，摄影机数量越少越好，以便无论在堡垒外的哪个地方，至少有一台摄影机可以看到那个位置。这就是所谓的『堡垒问题』。就像在艺廊问题中一样，我们只能将摄影机放置在角落。

只要堡垒的边数固定，我们可以算出所需摄影机的数量，不论其形状为何。这个问题的摄影机数量是边数除以 2，然后无条件进位到下一个整数。因此，对于一个有 7 个边的形状，你最多需要 4 台摄影机(因为 7 的一半是 3.5，无条件进位到 4)。



自行创作其他形状的堡垒，并且试着设置最少的摄影机。

相关资料:

我们上面描述的艺廊的奇特形状在数学上称为『多边形』。多边形的数学定义是，一种由直线相连而成的简单、封闭的形状。

『简单』意味着这些直线不相交，而『封闭』意味着这些直线相连形成一个完整的形状，没有间隙。例如，三角形是一个有三条直边的多边形，正方形是一个有四条直边的多边形，而十字形不是一个多边形。这些边相交的点是形状的角度，这些角有时也被称为顶点。

三角形是最简单的多边形，可以看作是所有多边形的基本构建单元。通过组合不同的三角形可以构建各种多边形；反过来，我们也能够解构多边形将之分成众多三角形。将多边形划分为三角形的过程称为『三角划分』。

如果你想深入了解这方面的知识, 这里有一本推荐的书籍:《Art Gallery Theorem and Algorithms》(作者: Joseph O'Rourke, 出版社: 牛津大学出版社, 1987年)。这本书可以查阅或[在这里下载](#)。

创作并分享!

分享你创作的特殊造型艺廊或稀奇古怪的特色堡垒, 并 hashtag **#idm314**画廊 或 **#idm314**让我们看见你

© 2023 Christiane Rousseau

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#).