



## 藝廊問題 & 堡壘問題

### 參與者:

年齡為10至12歲及以上，無需先備數學知識。

### 前置工作:

印出範本

四支不同顏色的鉛筆(例如, 紅色、綠色、藍色、黃色)

空白紙張, 供參加者創建自己的藝廊

也可使用彩色粉筆在學校操場或街道上進行戶外活動

### 活動 1. 用攝影機監控藝廊內部

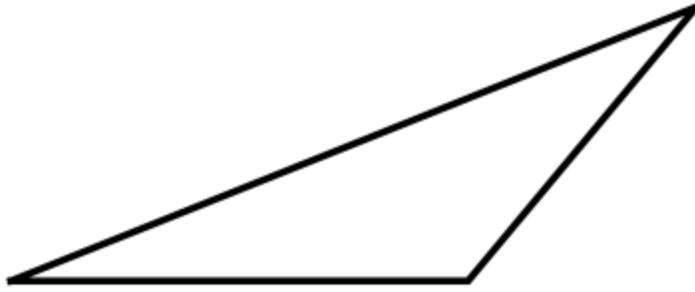
想像一下, 你身處於一個充滿驚人藝術品的藝廊中。這個藝廊的平面不像一般的矩形或正方形, 而是有著很奇特的形狀, 有許多拐角和轉折。這個形狀是由相交的直線構成的(數學上稱之為多邊形)。你的任務是在藝廊的特定位置戰略性地放置監視用的攝影機, 以確保藝廊中的每個地方都能被看到並受到監視。但這裡有一個難題: 這些攝影機只能放置在藝廊的拐角處。

你的任務是使用最少數量的監控攝影機, 以便藝廊中的每個地方都受到監視。這就是所謂的「藝廊問題」。

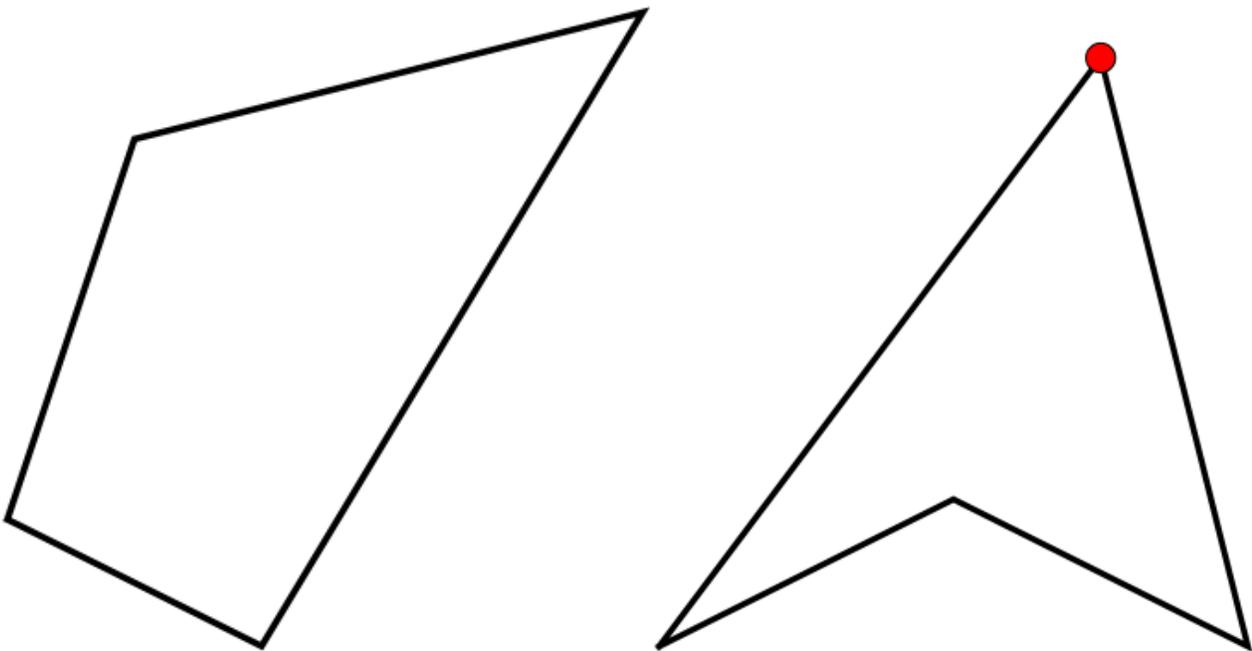
你可以使用鉛筆, 從攝影機開始畫出直線, 追蹤攝影機可以看到的區域。請記住, 攝影機無法穿透牆壁。可以先使用直尺輔助觀察攝影機可以覆蓋哪些區域。

#### 1. 讓我們從一些簡單的情況開始探討這個問題:

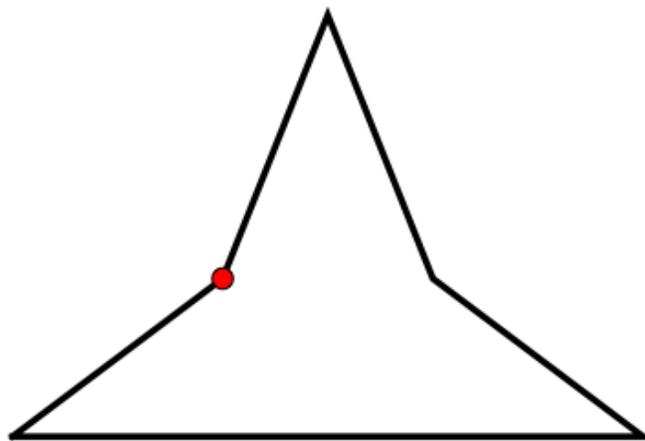
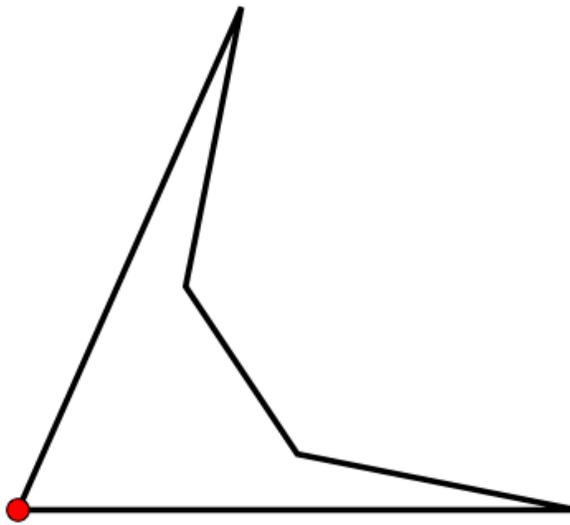
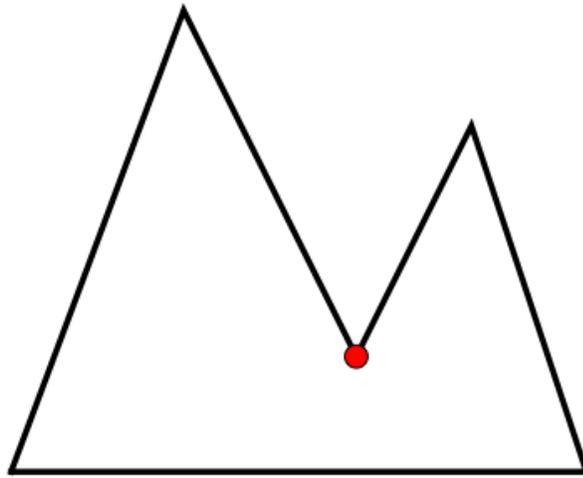
- 對於一個三角形格局的藝廊, 我們只需要一台攝影機, 可以放置在任何一個拐角, 也就是三角形的頂點, 如下所示:



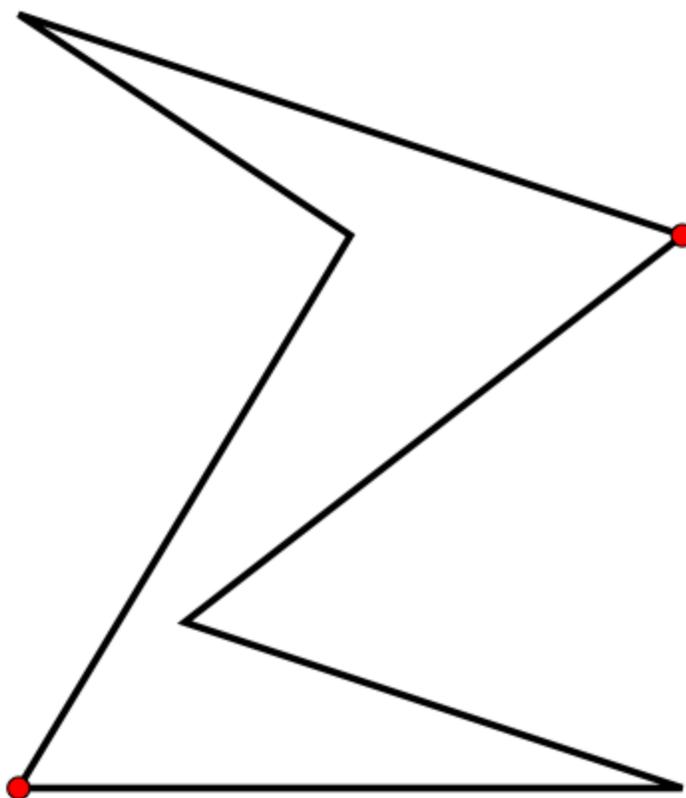
- 四邊形藝廊同樣也只需要一台攝影機。如果它是一個形狀簡單、拐角朝外的形狀("凸形"), 可以將攝影機放在任何一個拐角, 請參見左側的圖片。如果室內格局更加複雜, 有一些拐角朝內("凹形"), 則必須更謹慎地選擇攝影機的位置, 以覆蓋所有區域, 請參見右側圖片中的紅點。對於右側的藝廊, 還有可能找到第二個攝影機的位置。你能找到它嗎?



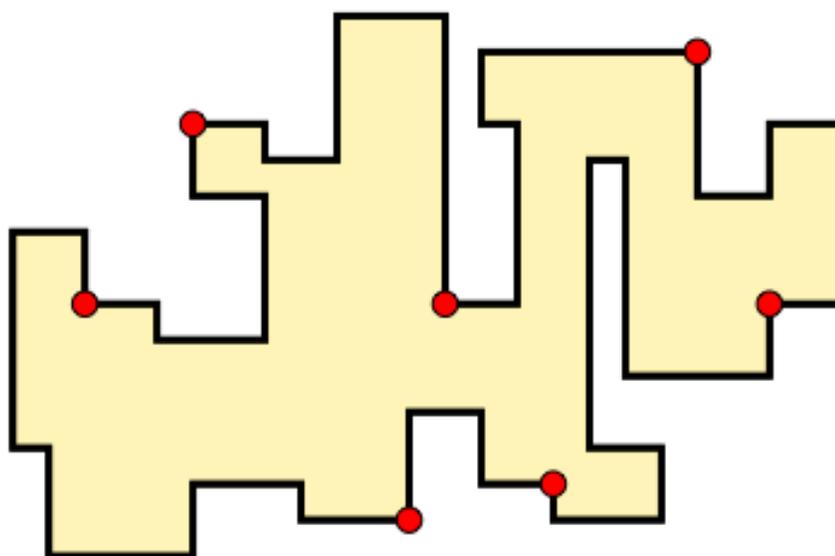
- 在一個五邊形藝廊中, 同樣只需要一台攝影機。總是可以將一台攝影機放在一個特殊的拐角, 不論五邊形長怎樣, 從那個拐角你可以看到整個藝廊的內部。請參見下面的圖片:



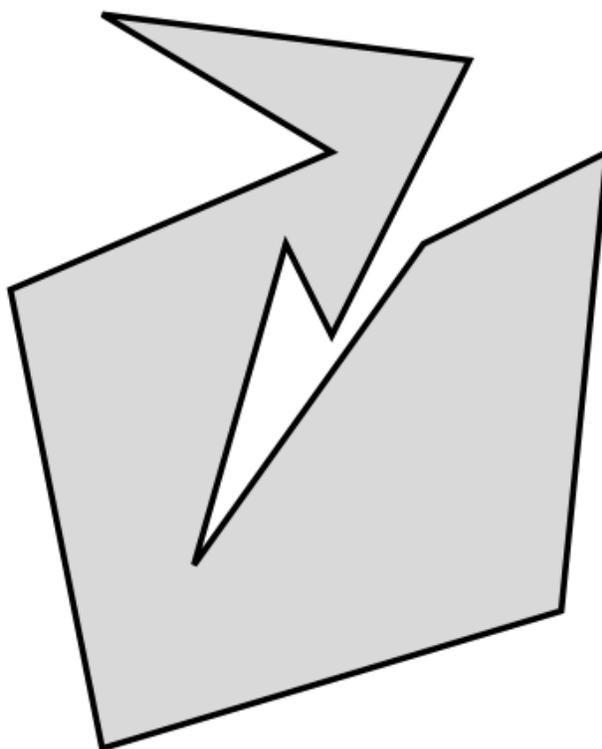
- 然而，在六邊形藝廊中，你可能需要兩台攝影機，如下圖：



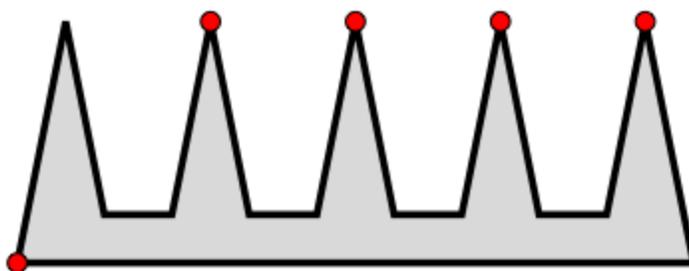
- 下方這個藝廊至少需要 7 台攝影機：



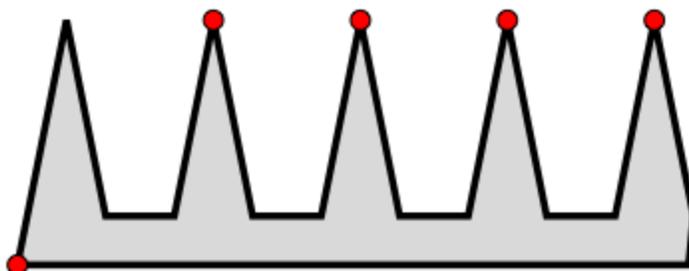
- 你能只用兩台攝影機監控這整間藝廊嗎？

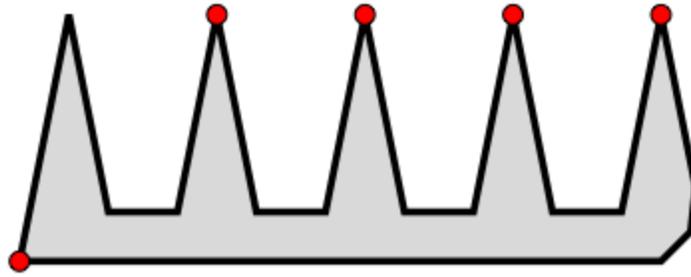


2. 現在我們轉到一個更數學的面向來探討，多邊形的邊數和所需要的攝影機數量的關係。在下面這個具有15個邊的藝廊中，你至少需要5台攝影機才能完全覆蓋整間藝廊，下圖是一種設置方式。



而只有 4 台攝影機是絕對辦不到的，因為你不可能有一台攝影機能夠同時觀看到上方五個尖點裡面的兩個，因此光是監控這五個尖點就至少需要 5 台攝影機。同樣的情況也會發生在下面的 16 邊形和 17 邊形格局的藝廊。





請注意，5是15、16或17除以3的商。

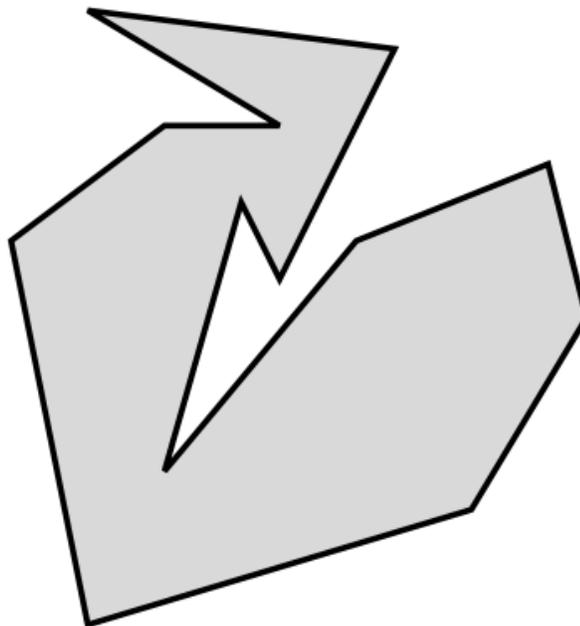
重新查看上面的所有例子，檢查在每種情況下，你是否可以用不超過邊數除以3的商這個數量的攝影機來觀看整個藝廊。

數學家 Václav Chvátal 在 1975 年證明了

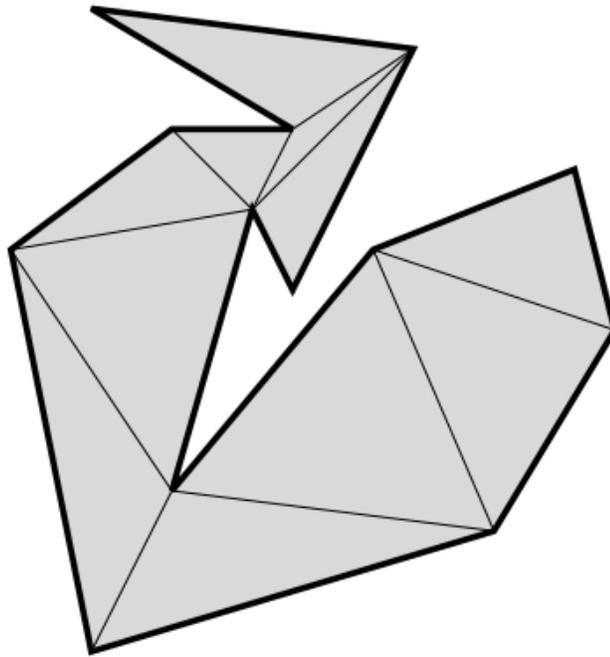
攝影機數量等於邊數除以3的商對於任何藝廊都是足夠的！

舉例來說：對於六邊形藝廊，需要 2 台攝影機，對於十邊形藝廊，需要 3 台攝影機，對於 23 邊形藝廊，需要 7 台攝影機。有趣的是，Chvátal 的規則允許你把攝影機放在藝廊內部仍然有效，而不限制放在角落。因此，這對要在複雜形狀的地方設置監視攝影機來說是很有用的指南。

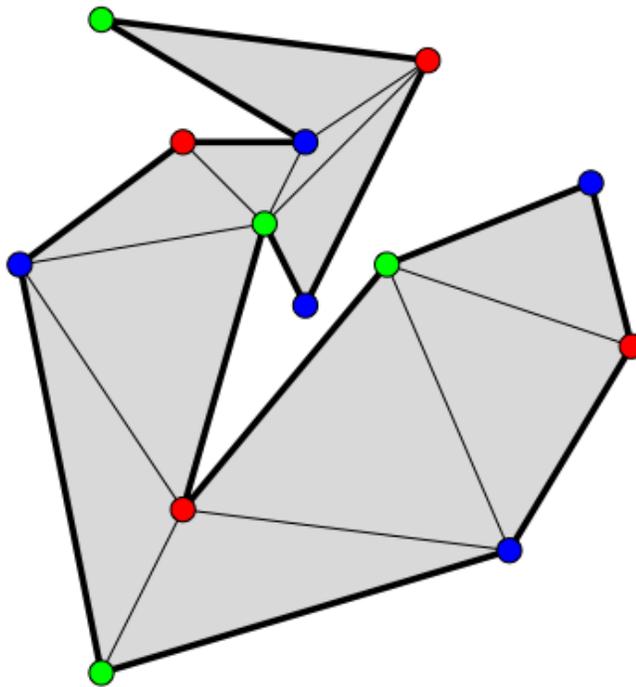
3. 1978年，數學家 Steve Fisk 提出了一個比 Václav Chvátal 更簡單而優雅的證明。他提供了一個演算法，或者說是一個按部就班的指令，來確定每個攝影機應該放置的位置。讓我們仔細看看這個演算法在下面藝廊中是如何運作的。



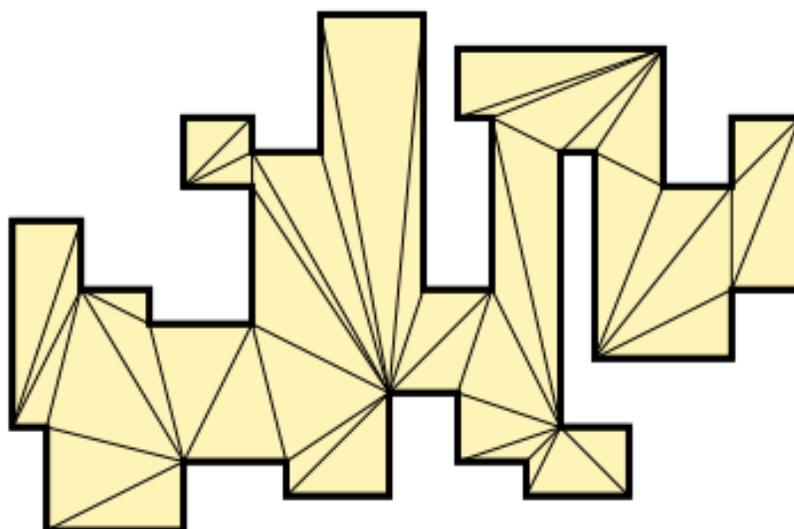
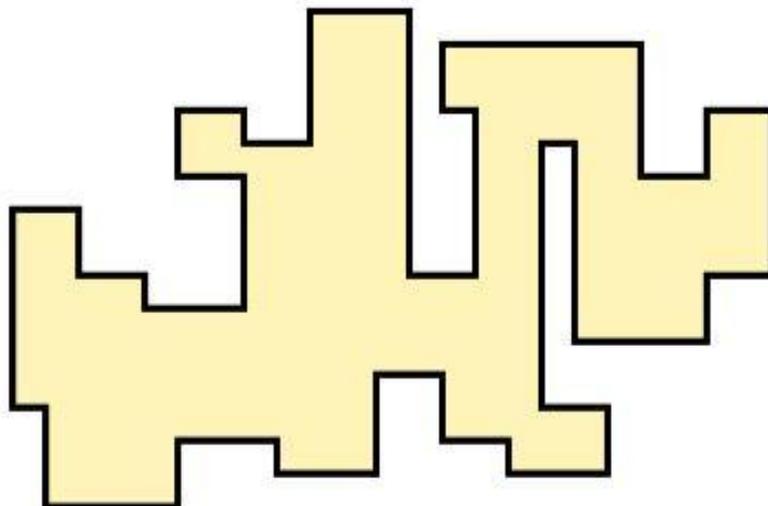
- 第一步是將我們的藝廊劃分為三角形。這些三角形的角落位置與原始藝廊的角落必須相同：

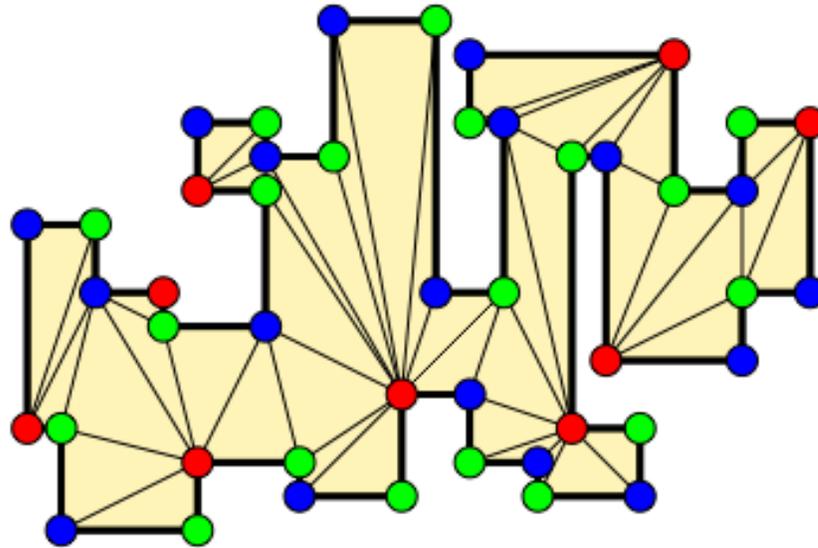


- 接下來的步驟是為每個角落分配三種顏色中的一種(假設是紅色、綠色和藍色)，讓每個三角形的頂點都具有三種不同的顏色(這總是可能的)。



- 選擇出現最少次數的顏色。在這個例子中，紅色有 4 個點，綠色有 4 個點，藍色有 5 個點。所以，有兩種選擇，我們可以選擇 4 個紅點，通過在這些紅點處放置攝影機來解決問題。我們也可以在 4 個綠點處放置攝影機。在這兩種情況下，4 台攝影機足以觀察到所有區域。
- 來看一個更複雜的例子：

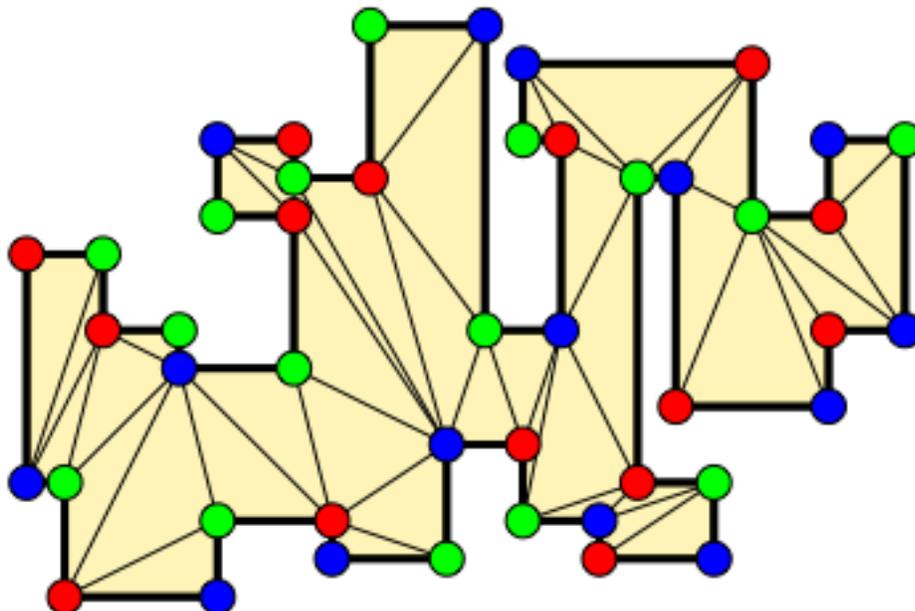




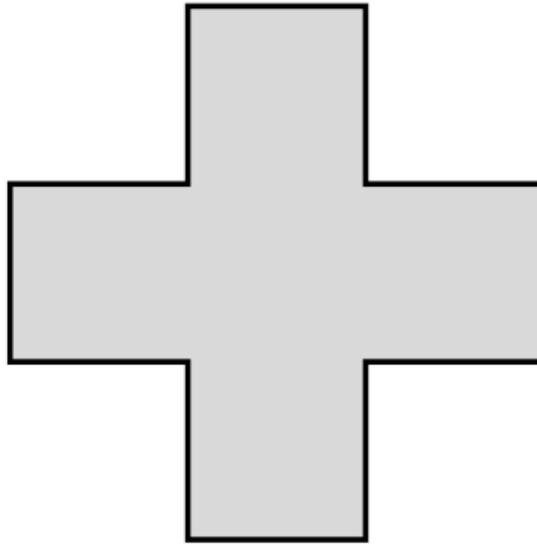
在這個例子中，我們有 9 個紅點，18 個藍點，和 19 個綠點。因此，通過在這 9 個紅點處放置攝影機，就能解決這個問題。

有趣的是，『三角劃分並不唯一』。下面是相同藝廊的圖片，但與之前的圖片中的三角形劃分不同。這意味著有不同的方法可以將一個藝廊劃分為三角形。對於不同的三角形，每個三角形的角的顏色也不盡相同。

換句話說，用這個演算法，對於一個藝廊，可能仍有許多個放置攝影機的解。在下面的新三角劃分中，有 15 個紅點，15 個藍點和 16 個綠點。因此，需要 15 台攝影機，可以放置在紅點或藍點。這個解決方案明顯不如之前的解決方案。因此，Fisk 的演算法提供了解決方案，但可能不是最優的。

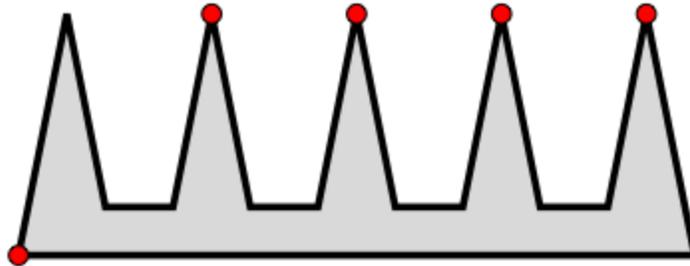


- 尋找不同方法將這個多邊形劃分為三角形，並在每種情況下探索攝影機的放置。



事實上，有比演算法更好的方案，只需要一台攝影機。你能做到嗎？

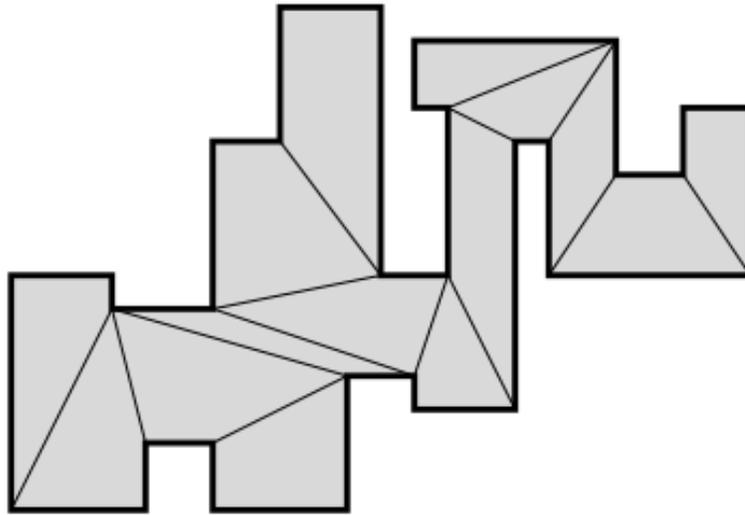
- 畫出下圖的三角化，並且讓演算法能提供符合的解答(其中三角形可能很細)：



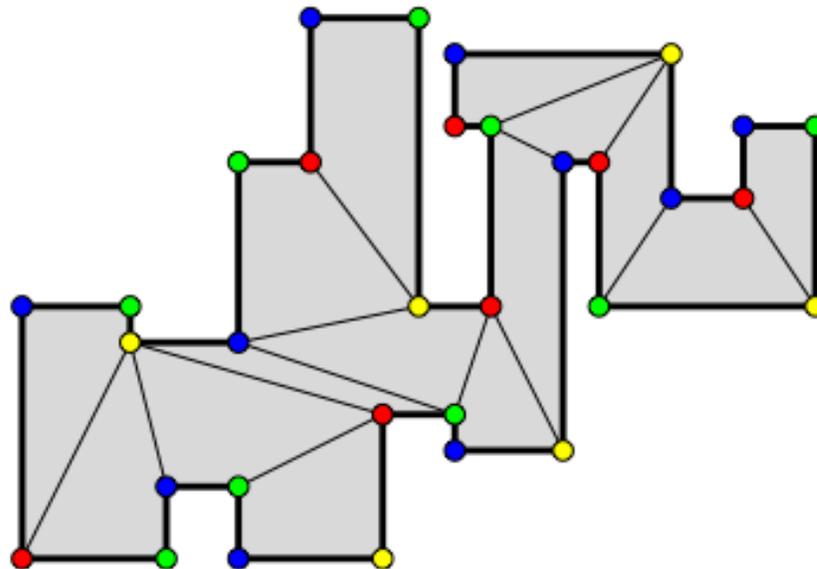
4. 試著創作自己的創意藝廊，並且利用演算法探索攝影機的擺設方法。
5. 在 1980 年，Jeff Khan、Maria Margaret Klawe 和 Daniel J. Kleitman 針對直角藝廊，也就是每個拐角都是 90 度的藝廊，找到了更有效率的方法。與之前情況類似，你會使用一定數量的攝影機來監控藝廊內部的整個區域，然而直角藝廊所需的攝影機數量與一般藝廊的情況不同。在這裡，你不是將邊數除以 3 (如前所述)，而是除以 4，然後捨去小數取商值。因此，如果你的藝廊有 20 個邊，你可以確定至多 5 台攝影機就足夠。如果你的藝廊有 8 個邊，至多 2 台攝影機就足夠了。由於四分之一小於三分之一，這意味著一般而言僅包含直角的藝廊需要的攝影機較少！

這裡的基本想法與我們之前討論的類似。我們再次希望將藝廊劃分為較小的形狀。但由於我們的藝廊具有僅包含直角的特殊性質，現在可以將其劃分為四邊形，並且讓這些四邊形是『凸四邊形』，就是角不向內凹的形狀。這種劃分為四邊形的方式在一般形狀的藝廊是不一定保證成功的！

這些凸四邊形的角必須位於藝廊的拐角。雖然這種劃分並沒有直觀的方法能展現和證明，但它能讓你用更少數量的攝影機有效地覆蓋直角藝廊的整個內部。



你可以使用四種顏色來塗色這些四邊形的角，確保每個角獲得不同的顏色，並確保每個四邊形的四個角都使用了四種顏色。

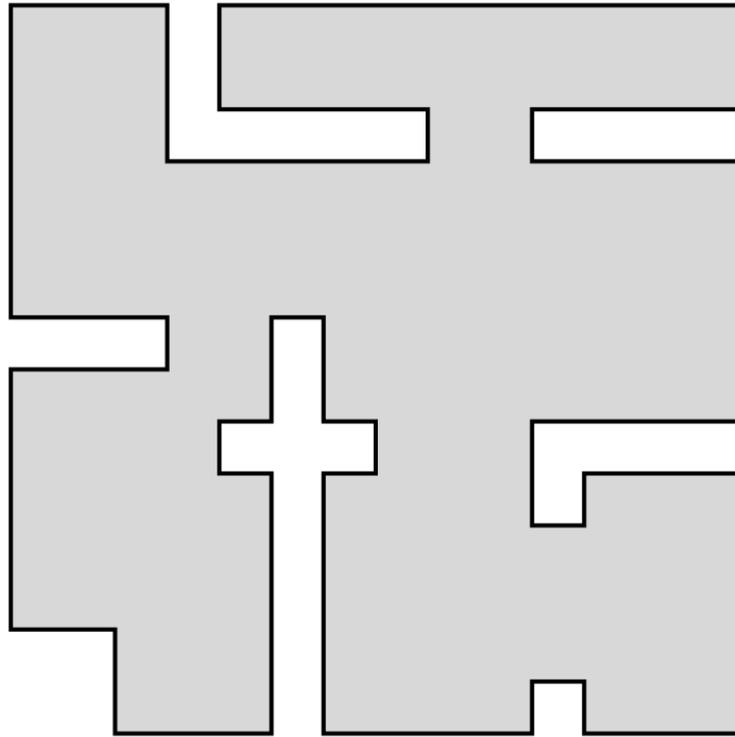


有 6 個黃色角, 7 個紅色角, 9 個綠色角和 10 個藍色角。

請記住, 放置在凸四邊形的任何角落的攝影機可以監視整個四邊形。

因此, 我們只需將攝影機放置在黃色角即可, 由於現在我們使用了四種不同的顏色而不是三種, 這使我們僅需要更少數量的攝影機, 就能夠監控到每一個地方。

試著在下圖執行這套方法：

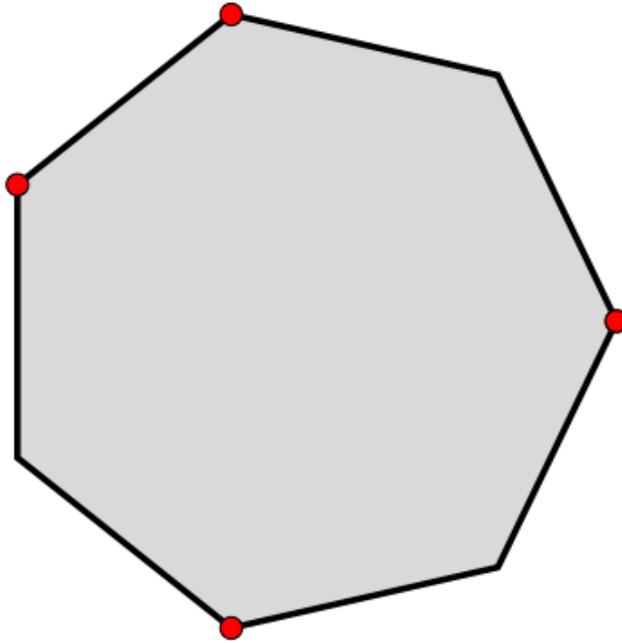


試著創作其他有趣的直角藝廊，並使用同樣方法來設置攝影機。

## 活動2. 用攝影機監控堡壘外部

想像一下有一座堡壘，它的形狀是一個由直邊和角形成的封閉圖形。這裡的挑戰是要找出在堡壘內放置攝影機(或守衛)的方式，攝影機數量越少越好，以便無論在堡壘外的哪個地方，至少有一台攝影機可以看到那個位置。這就是所謂的『堡壘問題』。就像在藝廊問題中一樣，我們只能將攝影機放置在角落。

只要堡壘的邊數固定，我們可以算出所需攝影機的數量，不論其形狀為何。這個問題的攝影機數量是邊數除以 2，然後無條件進位到下一個整數。因此，對於一個有 7 個邊的形狀，你最多需要 4 台攝影機(因為 7 的一半是 3.5，無條件進位到 4)。



自行創作其他形狀的堡壘，並且試著設置最少的攝影機。

#### 相關資料：

我們上面描述的藝廊的奇特形狀在數學上稱為『多邊形』。多邊形的數學定義是，一種由直線相連而成的簡單、封閉的形狀。

『簡單』意味著這些直線不相交，而『封閉』意味著這些直線相連形成一個完整的形狀，沒有間隙。例如，三角形是一個有三條直邊的多邊形，正方形是一個有四條直邊的多邊形，而十字形不是一個多邊形。這些邊相交的點是形狀的角，這些角有時也被稱為頂點。

三角形是最簡單的多邊形，可以看作是所有多邊形的基本構建單元。通過組合不同的三角形可以構建各種多邊形；反過來，我們也能夠解構多邊形將之分成眾多三角形。將多邊形劃分為三角形的過程稱為『三角劃分』。

如果你想深入了解這方面的知識，這裡有一本推薦的書籍：《Art Gallery Theorem and Algorithms》（作者：Joseph O'Rourke，出版社：牛津大學出版社，1987年）。這本書可以查閱或在[這裡下載](#)。

#### 創作並分享！

分享你創作的特殊造型藝廊或稀奇古怪的特色堡壘，並 hashtag **#idm314gallery** 或 **#idm314** 讓我們看見你

© 2023 Christiane Rousseau

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#).