



Os problemas da galeria de arte e da fortaleza

Participantes:

Idades: maiores de 10 - 12 anos.

Não são necessários conhecimentos prévios em matemática.

Preparação:

Modelos de galerias impressos, lápis em quatro cores diferentes (por exemplo, vermelho, verde, azul, amarelo).

Folhas em branco para cada participante poder criar a sua própria galeria.

Outra opção é realizar a atividade no exterior com giz colorido, no recreio da escola ou na rua.

Atividade 1. Proteger a galeria de arte com câmaras

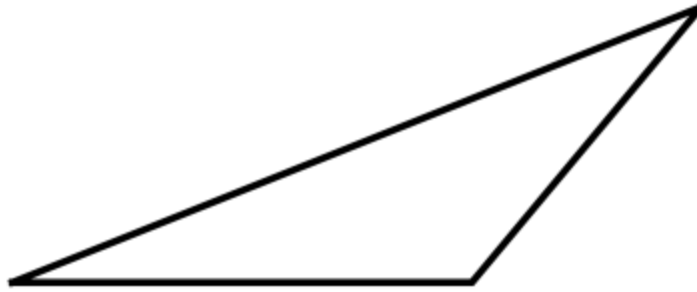
Imagina que estás numa galeria de arte onde estão expostas obras de arte muito valiosas. A galeria não tem a forma habitual de um retângulo ou de um quadrado, a sua planta tem uma forma muito fantasiosa, com muitos cantos. Esta forma é composta por linhas rectas que se encontram em vértices (em matemática, esta forma é designada por polígono). A tua missão consiste em colocar câmaras em pontos específicos da galeria, estrategicamente, para garantir que todas as zonas da galeria podem ser vistas e estão sob vigilância. Mas há um senão: tens de usar o menor número possível de câmaras. E estas câmaras só podem ser colocadas nos cantos de cada galeria.

A tua tarefa consiste em colocar o menor número possível de câmaras de segurança de modo que todas as zonas da galeria sejam vigiadas. Este problema é conhecido como o "problema da galeria de arte".

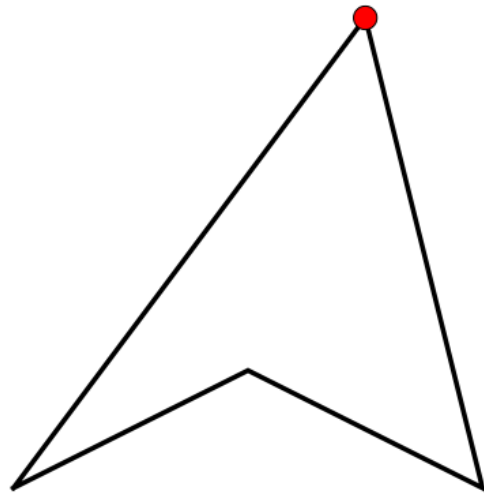
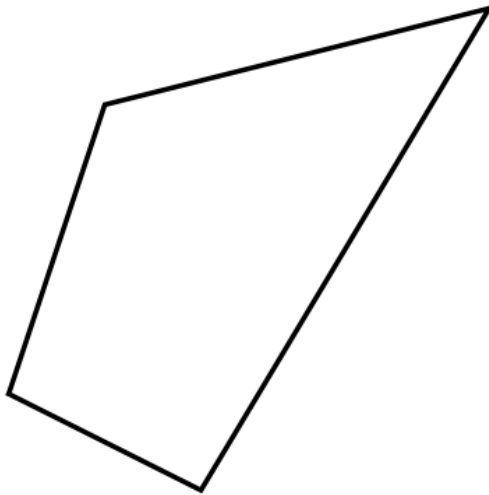
Com um lápis, podes desenhar linhas rectas a partir da câmara para delimitar a área que esta consegue ver. Não te esqueças de que a câmara não consegue ver através das paredes. Também podes analisar a linha de visão da câmara com uma régua que roda para veres o que a câmara consegue cobrir.

1. Vamos explorar alguns exemplos simples:

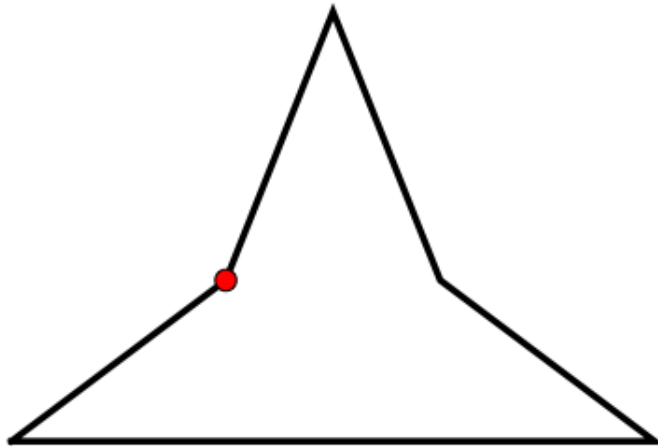
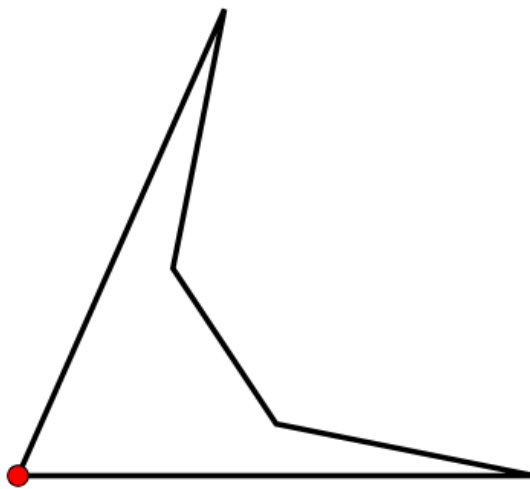
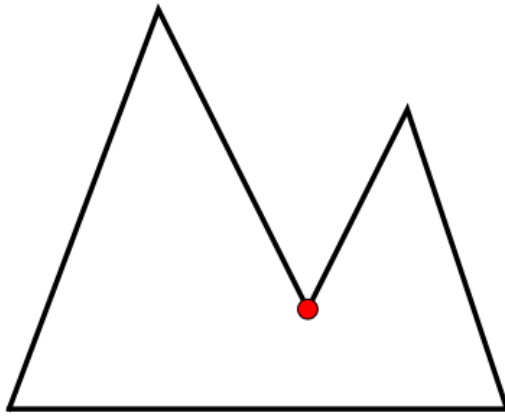
- Para uma galeria triangular, é suficiente uma única câmara, que pode ser posicionada em qualquer vértice do triângulo.



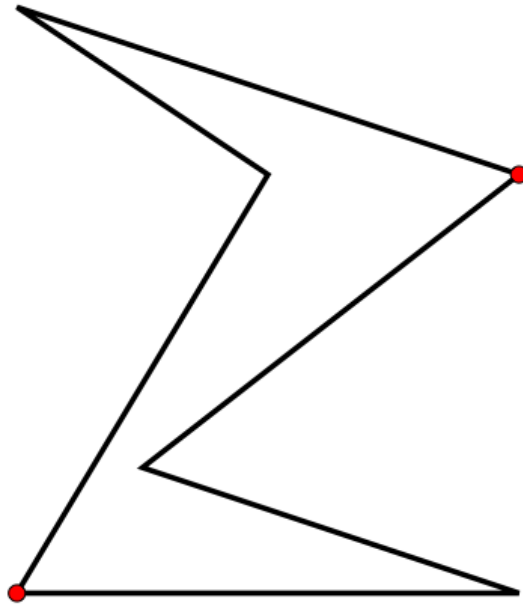
- Para uma galeria com quatro lados (uma forma deste tipo é designada por quadrilátero), uma única câmara é suficiente. Se se tratar de uma forma simples com os vértices a apontar para fora (diz-se que a forma é convexa), a câmara pode ser colocada em qualquer canto, como mostra a imagem da esquerda abaixo. Se a disposição for mais complexa, com cantos a apontar para dentro (cantos côncavos), a posição da câmara tem de ser escolhida com mais cuidado para cobrir toda a galeria: ver a imagem à direita abaixo. Para a galeria à direita, é possível uma segunda posição para uma câmara única. Consegues encontrá-la?



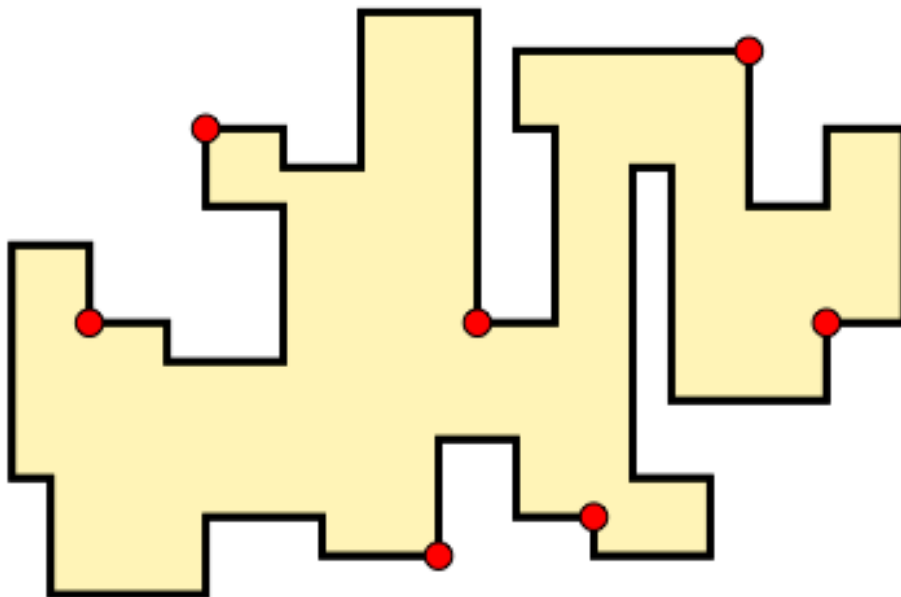
- Uma única câmara também é suficiente numa galeria com cinco lados (planta *pentagonal*). É sempre possível colocar uma única câmara num canto, de onde se pode ver todo o interior da galeria. Ver as imagens abaixo:



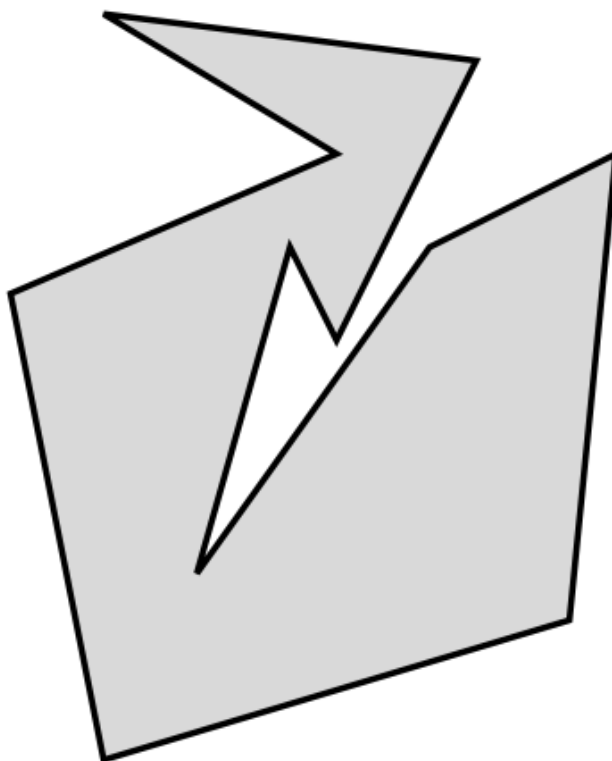
- No entanto, são necessárias duas câmaras para esta galeria de seis lados.



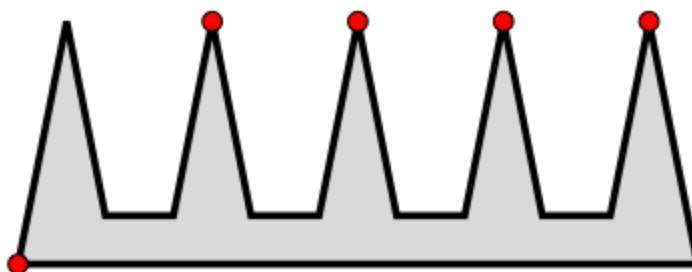
- Podes verificar se sete câmaras são suficientes para esta galeria.



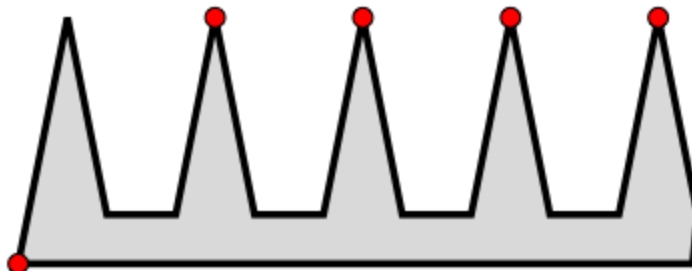
- Será que é possível colocar apenas duas câmaras para vigiar a galeria seguinte?

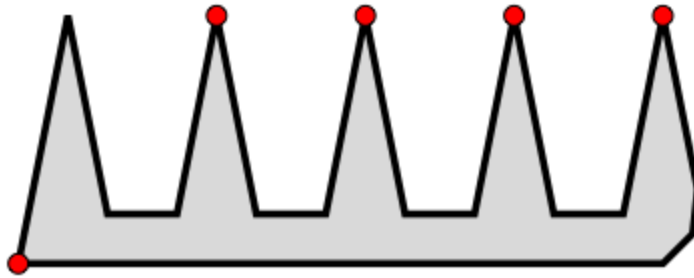


2. Passamos agora a uma regra matemática. Na galeria de arte abaixo, com 15 lados, são necessárias pelo menos 5 câmaras para a cobrir completamente.



É impossível utilizar menos de 5 câmaras e monitorizar tudo. O mesmo se aplica a estas duas galerias com 16 e 17 lados.

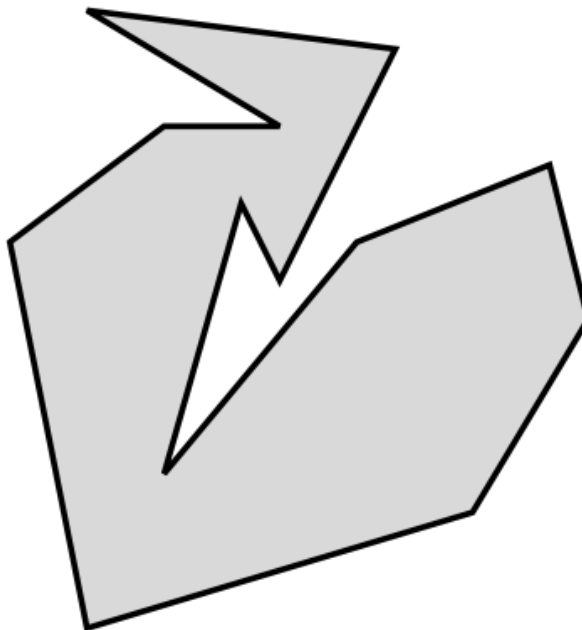




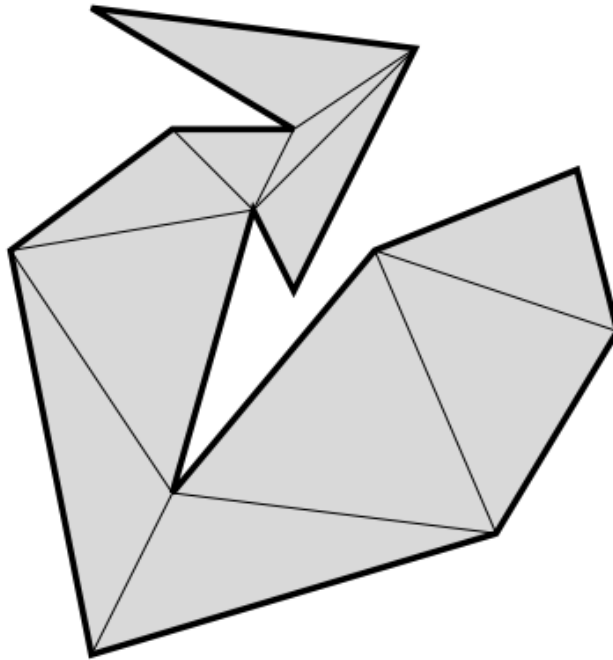
Repara que 5 é o quociente da divisão de 15, ou 16, ou 17 por 3. Pega em todos os exemplos acima e verifica que, em cada caso, é possível observar toda a galeria com um número de câmaras não superior ao quociente da divisão do número de lados por 3.

Em 1975, o matemático Václav Chvátal conseguiu provar que um número de câmaras igual ao quociente da divisão do número de lados por 3 é suficiente para qualquer galeria. Por exemplo, 2 câmaras são suficientes para galerias com 6 lados, 3 câmaras para galerias com 10 lados e 7 câmaras para galerias com 23 lados. Curiosamente, a regra de Chvátal continua a funcionar se colocarmos as câmaras no interior da forma e não apenas nos cantos. Trata-se, portanto, de uma orientação útil para a instalação de câmaras de vigilância em locais com formas diferentes e complicadas.

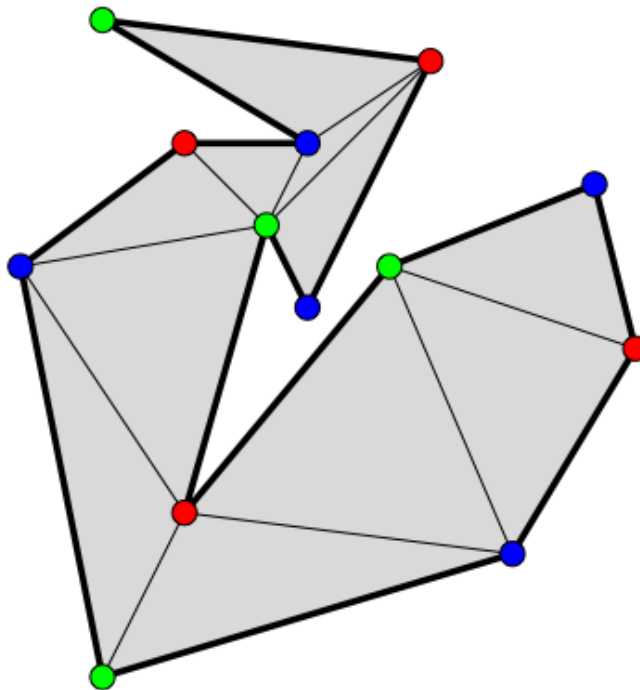
3. Uma prova muito elegante e mais simples do que a de Chvátal foi proposta pelo matemático Steve Fisk em 1978. Esta prova fornece um **algoritmo**, ou seja, um plano passo a passo, para determinar onde colocar as câmaras. Vamos explorar este algoritmo na galeria seguinte.



- O primeiro passo é dividir a galeria em triângulos cujos vértices são os vértices da galeria inicial.

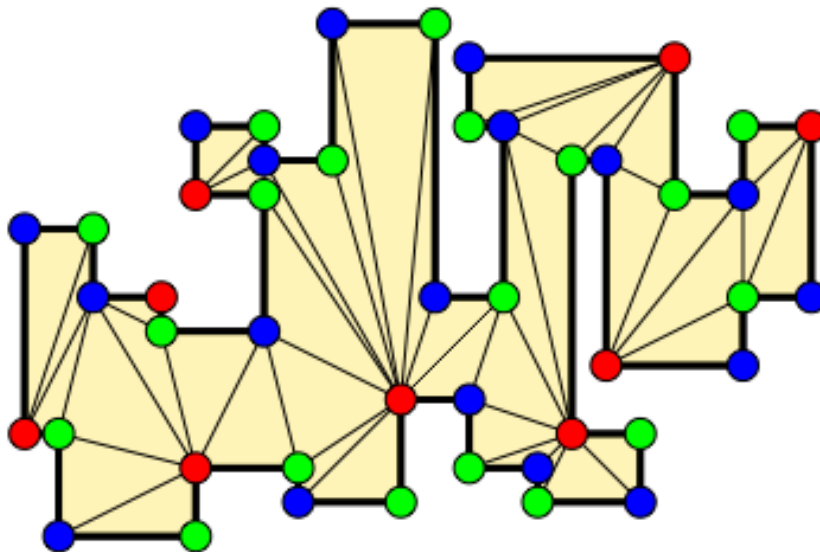
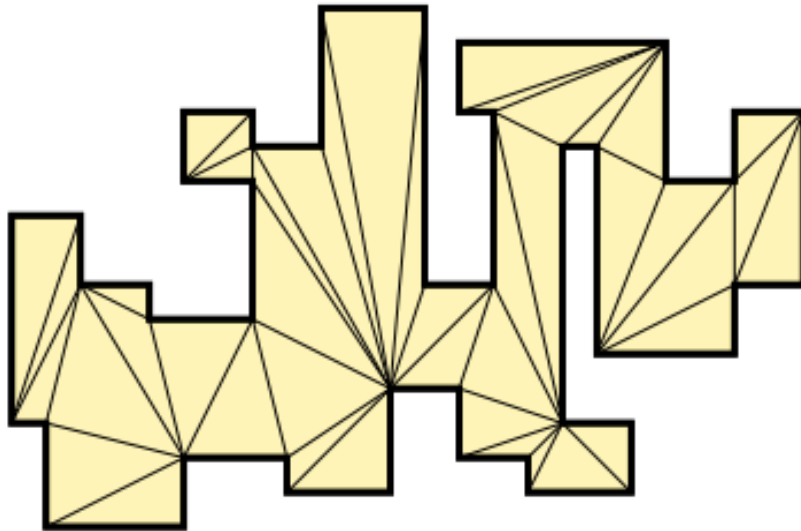
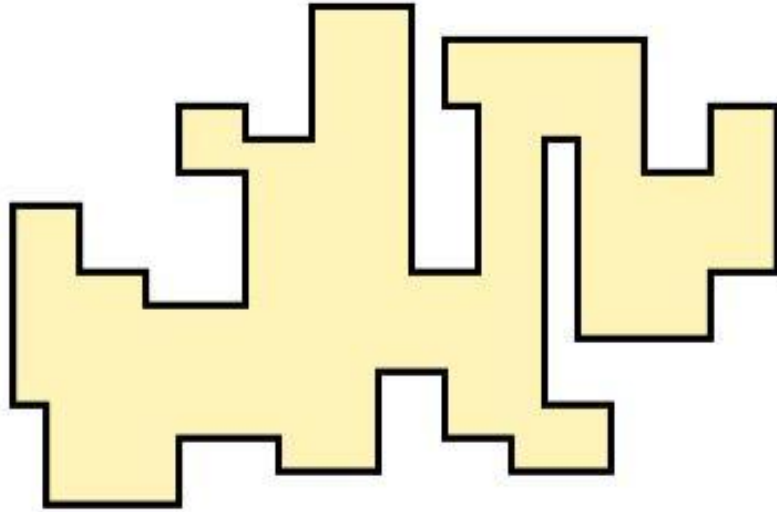


- O passo seguinte é atribuir uma das três cores (por exemplo, vermelho, verde e azul) a cada canto, de tal modo que cada triângulo fique com cantos de três cores diferentes (isto é sempre possível).



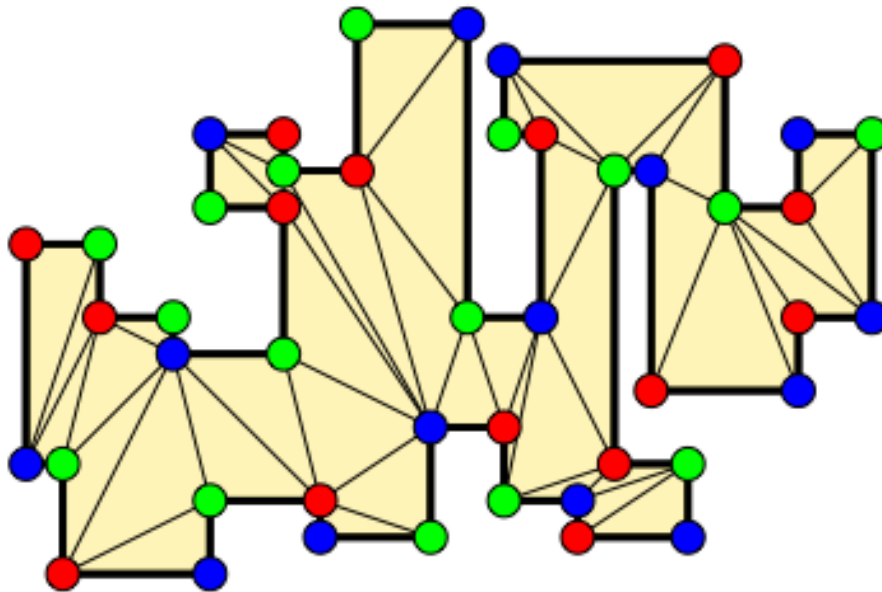
- Escolhe a cor que aparece menos. Neste caso, há 4 pontos vermelhos, 4 pontos verdes e 5 pontos azuis. Portanto, temos duas opções. Podemos escolher os 4 pontos vermelhos e resolver o problema colocando as câmaras nesses pontos vermelhos. Também poderíamos ter colocado as câmaras nos quatro pontos verdes. Em ambos os casos, as quatro câmaras são suficientes para monitorizar tudo.

- Eis um exemplo mais complicado:

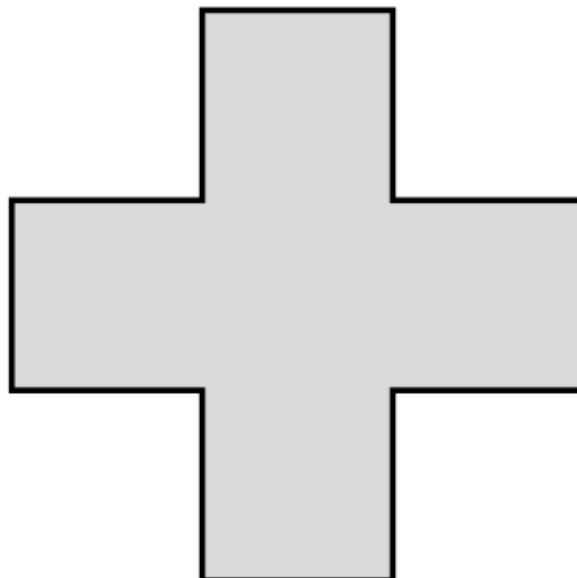


Neste caso, temos 9 pontos vermelhos, 18 pontos azuis e 19 pontos verdes. Assim, ao colocar as câmaras nos pontos vermelhos, obtemos uma solução para o problema.

Há outro facto interessante sobre este algoritmo: abaixo está uma imagem da mesma galeria, mas com triângulos diferentes dos da imagem anterior. Dizemos que "a triangulação não é única", o que significa que existem diferentes formas de dividir uma galeria em triângulos. Com triângulos diferentes, temos também cores diferentes de pontos em cada canto dos triângulos. Isto significa que, nessa galeria, existe mais do que uma solução para colocar as câmaras. Na nova triangulação abaixo, existem 15 pontos vermelhos, 15 pontos azuis e 16 pontos verdes. Assim, são necessárias 15 câmaras, que podem ser colocadas nos pontos vermelhos ou nos pontos azuis. Esta solução não é tão económica como a anterior. O algoritmo de Fisk fornece soluções, mas nem sempre são ótimas.

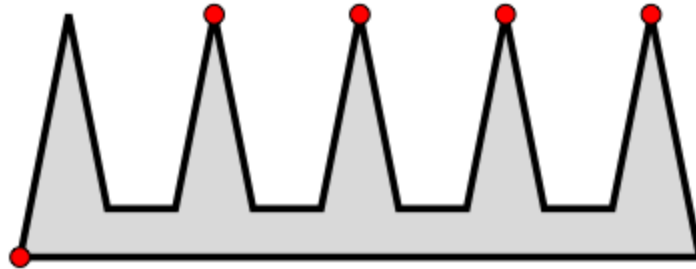


- Encontra diferentes formas de dividir este polígono em triângulos e estuda a localização das câmaras em cada caso.



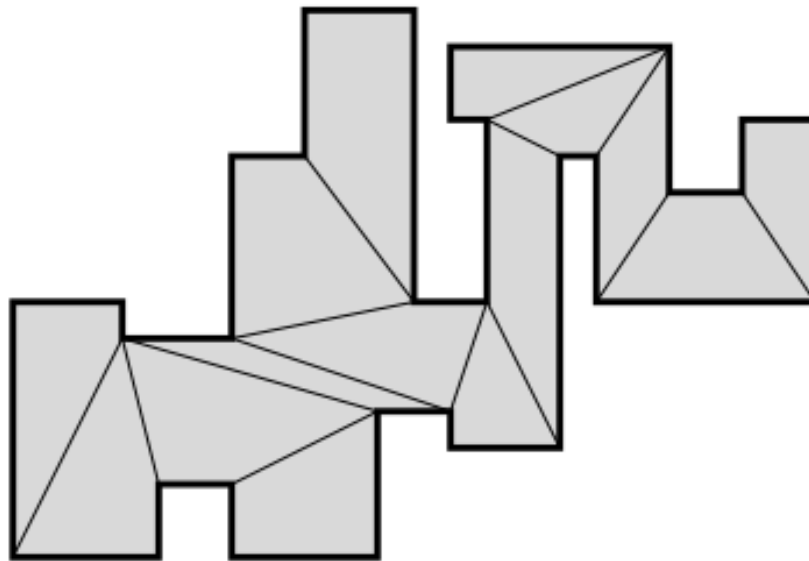
Existem soluções muito melhores do que as fornecidas pelo algoritmo. Estas soluções envolvem apenas uma câmara. Consegues encontrá-las?

- Desenha uma triangulação para a qual o algoritmo fornece a solução abaixo (alguns triângulos são muito finos):

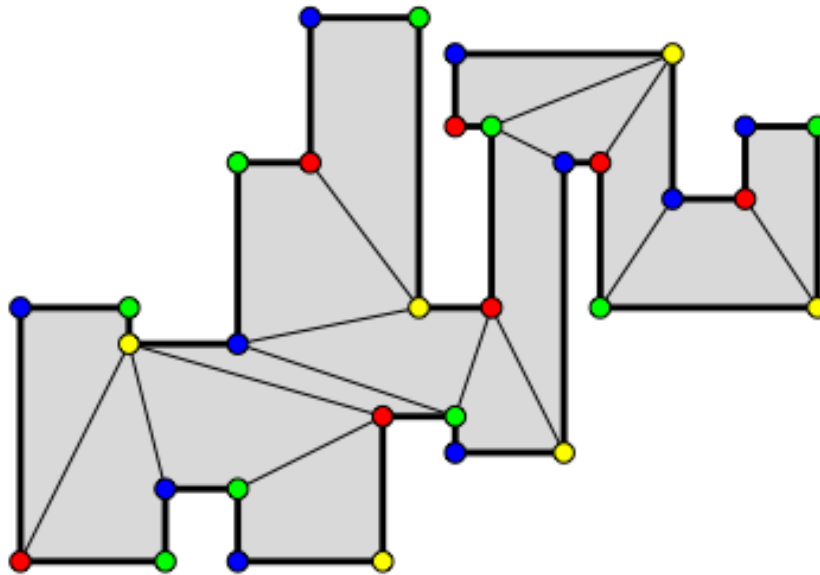


4. Desenha outros polígonos e explora o algoritmo sobre eles.
5. Em 1980, Jeff Khan, Maria Margaret Klawe e Daniel J. Kleitman descobriram uma regra mais económica para um tipo particular de forma, uma galeria com apenas ângulos rectos. Esta galeria é designada por galeria ortogonal. Tal como acima, é possível utilizar um certo número de câmaras para monitorizar todo o interior da galeria. Este número de câmaras não é o mesmo que para a forma mais geral de galeria de arte. Neste caso, não se divide o número de lados por 3 (como acima), mas por 4 - e truncam-se novamente as casas decimais. Assim, se a galeria tiver 20 lados, um máximo de 5 câmaras será sempre suficiente. Se a galeria tiver 8 lados, um máximo de duas câmaras será suficiente. Como um quarto é mais pequeno do que um terço, isto significa que as galerias de arte que só têm ângulos rectos precisam geralmente de menos câmaras!

A ideia básica aqui é semelhante à que vimos anteriormente. Mais uma vez, queremos dividir a nossa galeria de arte em formas mais pequenas. Mas como a nossa galeria de arte tem a particularidade de ter apenas ângulos rectos, é agora possível dividi-la em formas de quatro lados chamadas "*quadriláteros*". Os quadriláteros têm de ser "*convexos*". Isto significa que os quadriláteros têm lados rectos e vértices que não apontam para dentro. (Isto não era possível na galeria de arte mais geral!)

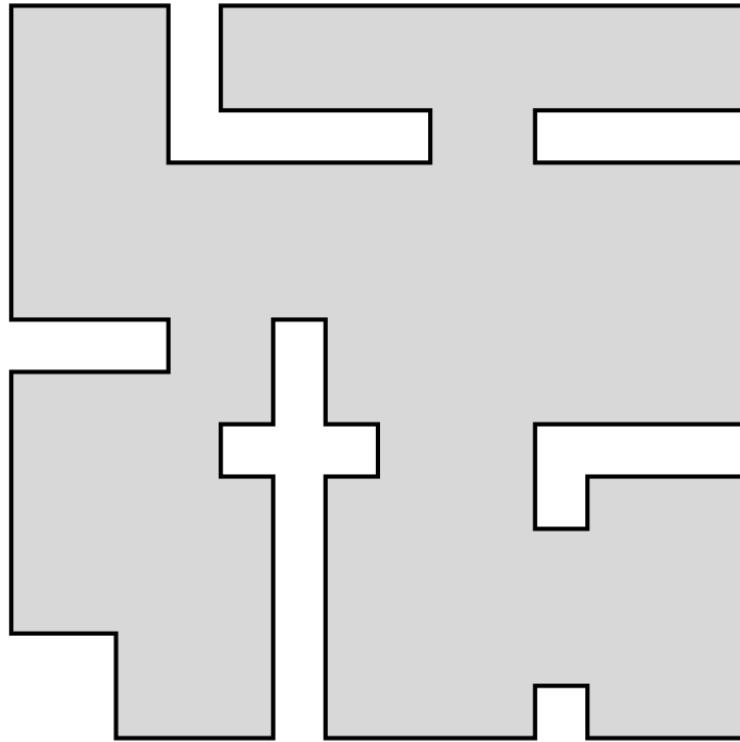


Os vértices podem então ser coloridos com quatro cores, de tal modo que os quatro vértices de cada quadrilátero sejam coloridos com as quatro cores.



Existem 6 vértices amarelos, 7 vértices vermelhos, 9 vértices verdes e 10 vértices azuis. Lembra-te que uma câmara colocada em qualquer vértice de um quadrilátero convexo pode monitorizar todo o quadrilátero porque este é convexo. Colocamos simplesmente as câmaras nos vértices amarelos.

Executa o algoritmo para esta galeria.



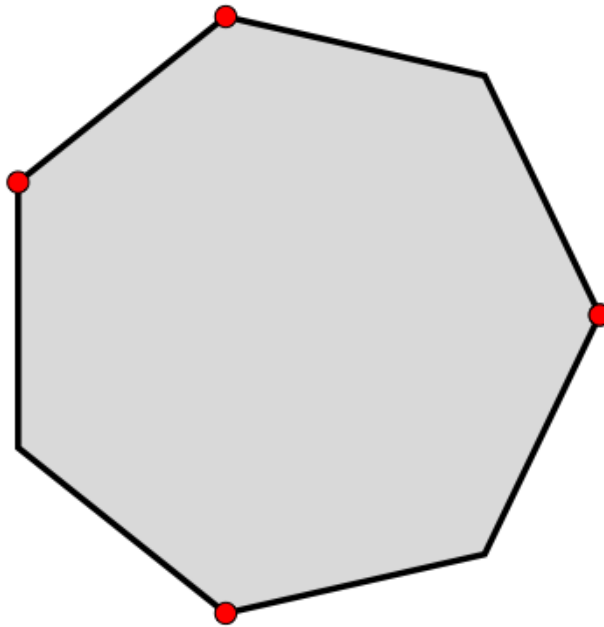
Desenha outros polígonos ortogonais e explora-os.

Atividade 2. O problema da fortaleza

Imagina uma fortaleza com a forma de uma figura fechada formada com lados retilíneos e vértices. O desafio é descobrir como colocar o menor número possível de câmaras (ou guardas) dentro da fortaleza, de modo a que, independentemente do local onde se esteja fora da fortaleza, pelo menos uma câmara possa monitorizar esse local.

Tal como no problema da galeria de arte, só podemos colocar câmaras nos vértices da forma.

Dadas todas as fortalezas com o mesmo número de lados, podemos encontrar um número suficiente de câmaras para todas essas fortalezas. Este número de câmaras é o número de lados dividido por 2, e o resultado é arredondado para o número inteiro seguinte. Assim, para uma forma com 7 lados, precisamos de um máximo de 4 câmaras (porque metade de 7 é 3,5, e arredondamos para o número inteiro seguinte, 4).



Desenha outras fortalezas e explora-as.

Contexto matemático e recursos:

As formas fantasiosas das galerias de arte acima descritas podem ser descritas matematicamente como "polígonos". Um polígono é uma forma simples e fechada obtida através da ligação entre várias linhas rectas. O termo "simples" significa que os segmentos de reta não se intersectam e o termo "fechado" significa que os segmentos de reta se unem para formar uma forma completa sem espaços vazios. Por exemplo, um triângulo é um polígono de três lados, um quadrado é um polígono de quatro lados e uma cruz não é um polígono. Os lados encontram-se em pontos, que são os cantos da forma. Estes cantos são também chamados vértices.

Os triângulos, que são os polígonos mais simples, podem ser considerados os blocos básicos de construção dos polígonos. Todas as formas poligonais podem ser construídas através da combinação de diferentes triângulos. Consequentemente, também é possível fazer o inverso e encontrar os triângulos que compõem um polígono. Este processo de divisão de um polígono em triângulos chama-se "triangulação".

Se quiseres saber mais, podes visitar o [sítio Wikipedia](#).

E se lês em inglês, aqui está um livro que recomendamos: *Art Gallery Theorem and Algorithms*, de Joseph O'Rourke, Oxford, University Press, 1987. O livro pode ser visto ou descarregado [aqui](#).

Criar e partilhar!

Partilha as galerias dos participantes e as fortalezas que criaste utilizando as **hashtag** **#idm314gallery** e **#idm314**.