JOURNÉE INTERNATIONALE DES MATHÉMATIQUES 14 MARS

Les problèmes de la galerie d'art et de la forteresse

Participants:

Ages : 10 - 12 et plus (selon l'activité).
Aucune connaissance mathématique préalable n'est requise.

Préparatifs:

Modèles imprimés, crayons de quatre couleurs différentes (par exemple, rouge, vert, bleu, jaune).
Feuilles vierges pour créer vos propres galeries.
Une autre possibilité est de faire l'activité dehors avec des craies de couleur, soit dans la cour d'école ou dans la rue.

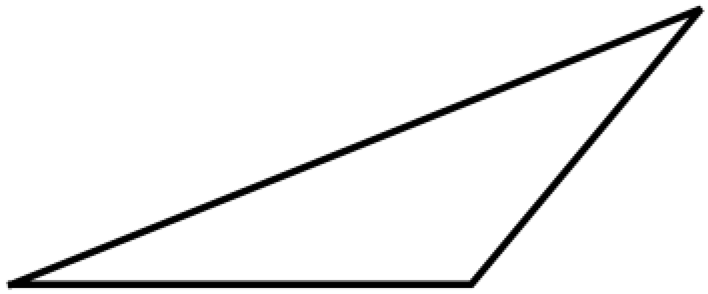
Activité 1. Protéger la galerie d'art avec des caméras

Imaginez que vous vous trouvez dans une galerie d'art remplie d'œuvres d'art extraordinaires. La galerie n'a pas la forme habituelle d'un rectangle ou d'un carré, mais son plan a une forme très fantaisiste avec beaucoup de coins. Cette forme est composée de lignes droites qui se rejoignent dans les coins (en mathématiques, on appelle une telle forme, un *polygone*). Votre mission consiste à placer stratégiquement des caméras à des endroits spécifiques de la galerie afin de vous assurer que chaque endroit de la galerie peut être vu et est sous surveillance. Mais voici le piège : vous devez utiliser le moins de caméras possible. Et ces caméras ne peuvent être placées que dans les coins de la galerie.

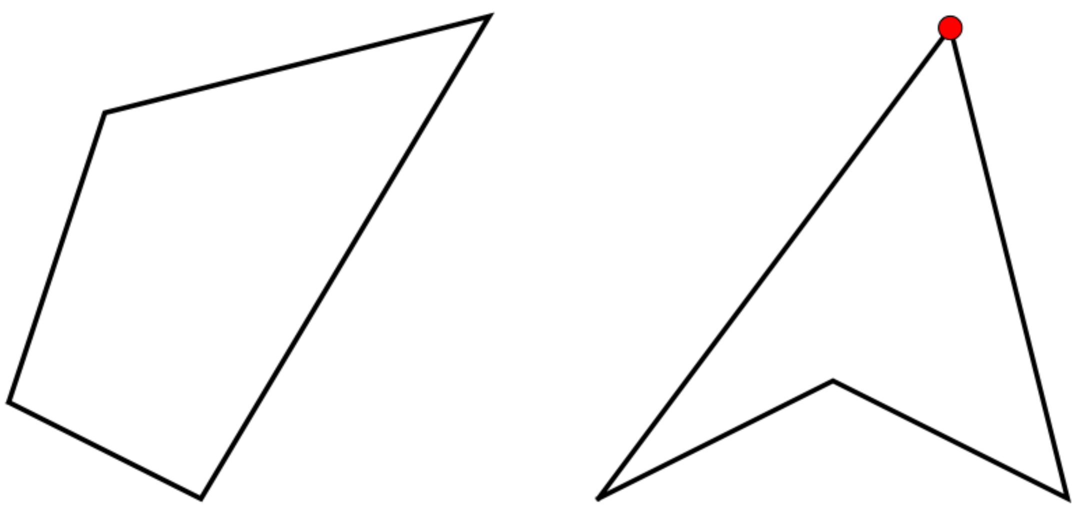
Votre tâche consiste à placer le plus petit nombre possible de caméras de sécurité afin que chaque endroit de la galerie soit surveillé. C'est ce qu'on appelle le "problème de la galerie d'art".

À l'aide d'un crayon, vous pouvez tracer des lignes droites à partir de la caméra pour délimiter la zone qu'elle peut voir. N'oubliez pas qu'elle ne peut pas voir à travers les murs. Vous pouvez également balayer la ligne de visée de la caméra à l'aide d'une règle qui tourne pour voir ce que la caméra peut couvrir.

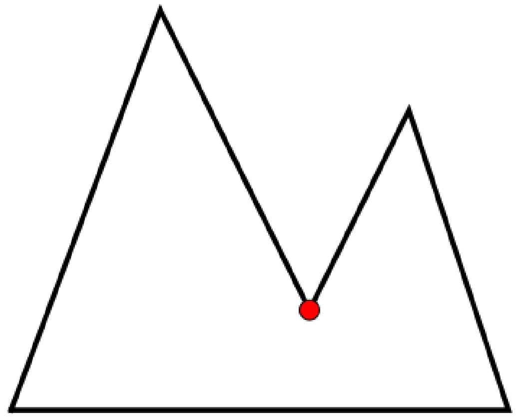
1. Explorons des exemples simples :
   - Pour une galerie de forme triangulaire, une seule caméra suffit, et elle peut être placée à n'importe quel sommet du triangle.

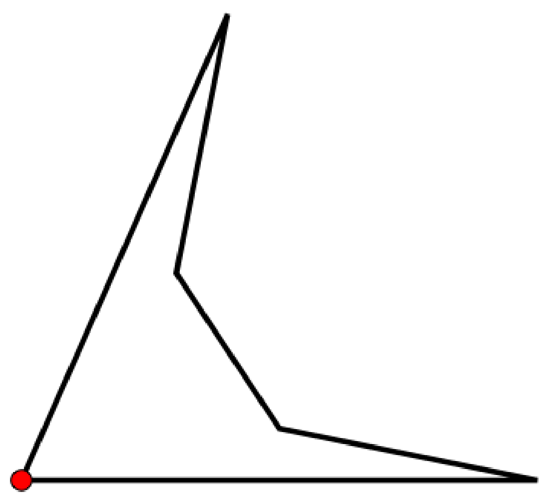


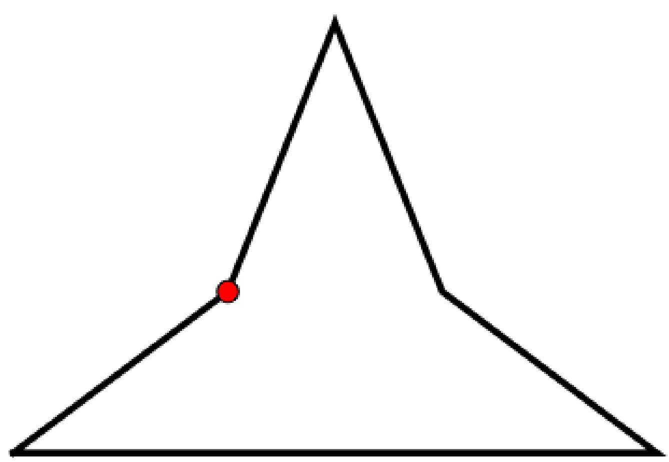
- Pour une galerie à quatre côtés (une telle forme est appelée *quadrilatère*), une seule caméra suffit. S'il s'agit d'une forme simple avec des coins pointant vers l'extérieur (on dit que la forme est *convexe)*, on peut placer la caméra à n'importe quel coin, voir l'image de gauche ci-dessous. Si la disposition est plus complexe avec des coins pointant vers l'intérieur (des coins *concaves*), il faut choisir la position de la caméra avec plus de soin pour couvrir toute la galerie: voir l'image de droite ci-dessous. Pour la galerie de droite, une deuxième position de la caméra est possible. Pouvez-vous la trouver ?



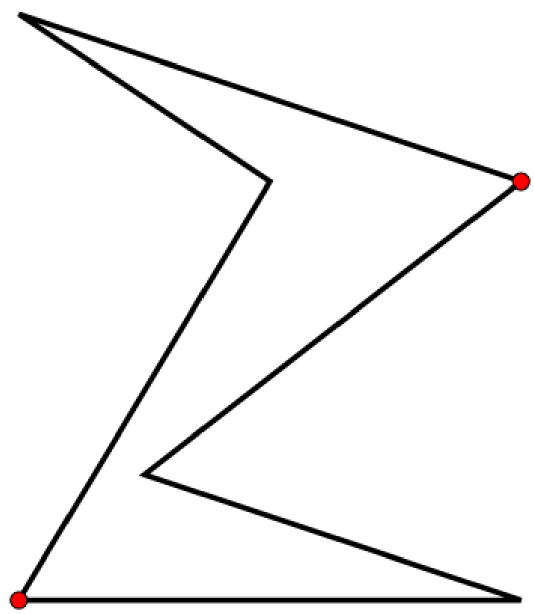
- Une seule caméra suffit également dans une galerie à cinq côtés (plan en forme de *pentagone*). Il est toujours possible de placer une unique caméra dans un coin, d'où l'on peut voir tout l'intérieur de la galerie. Voir les images ci-dessous :



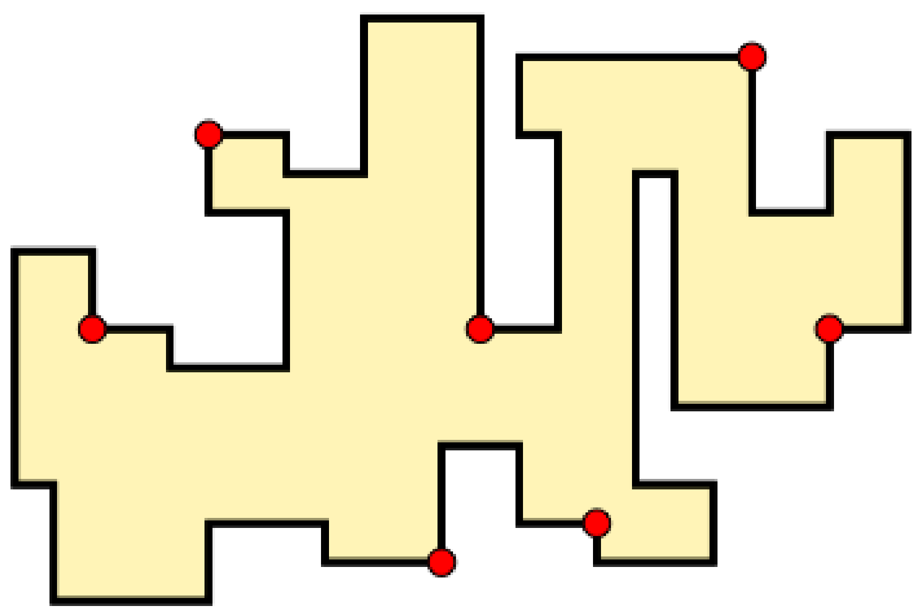




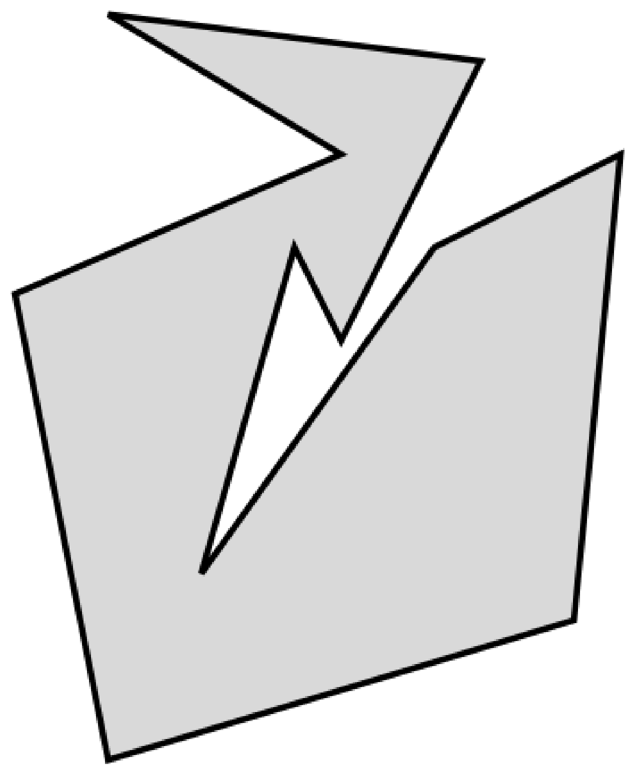
- Cependant, deux caméras sont nécessaires pour cette galerie à six côtés.



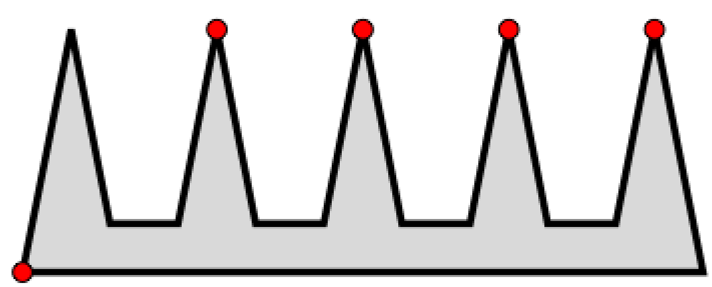
- Vous pouvez vérifier que sept caméras suffisent pour cette galerie.



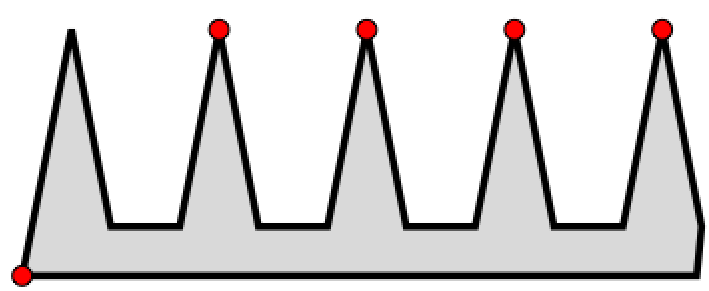
- Pouvez-vous placer seulement deux caméras pour observer la galerie suivante ?

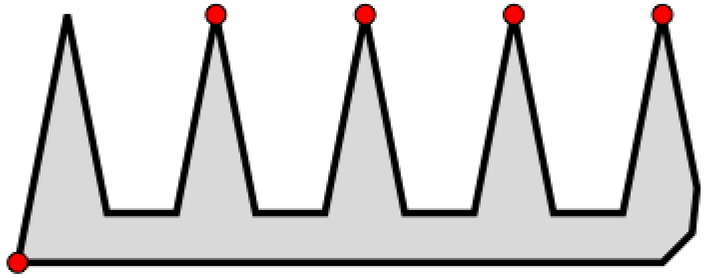


2. Nous passons maintenant à une règle mathématique. Dans la galerie d'art ci-dessous à 15 côtés, il faut au moins 5 caméras pour la couvrir entièrement.



Il est impossible d'utiliser moins de 5 caméras et de tout surveiller. Il en va de même pour ces deux galeries à 16 et 17 côtés.

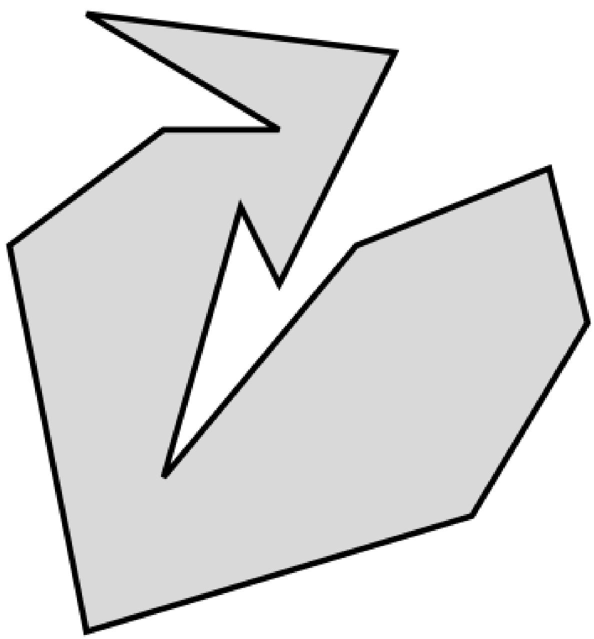




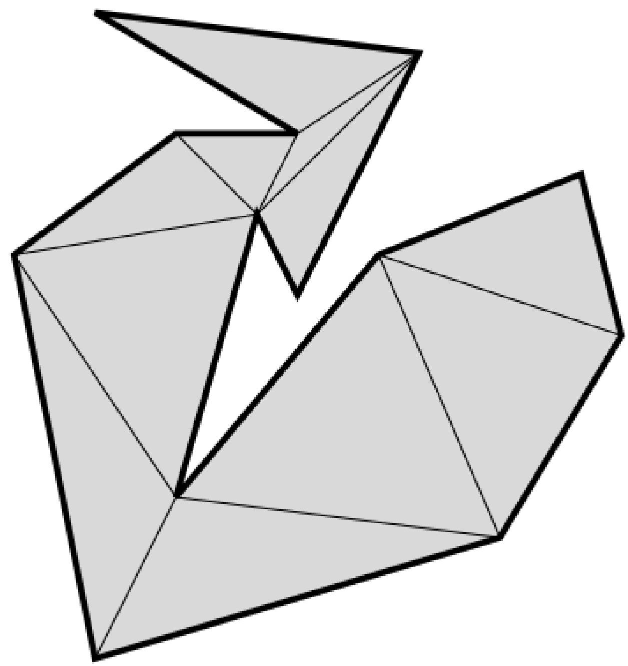
Remarquez que 5 est le quotient de la division de 15, ou 16, ou 17 par 3. Reprenez tous les exemples ci-dessus et vérifiez que, dans chaque cas, vous pouvez observer toute la galerie avec un nombre de caméras au plus égal au quotient de la division du nombre de côtés par 3.

Le mathématicien Václav Chvátal a pu prouver en 1975 qu'un nombre de caméras égal au quotient de la division du nombre de côtés par 3 est suffisant pour n'importe quelle galerie ! À titre d'exemple, pour les galeries à 6 côtés, il suffit de 2 caméras, pour les galeries à 10 côtés, de 3 caméras, et pour les galeries à 23 côtés, de 7 caméras. Il est intéressant de noter que la règle de Chvátal fonctionne toujours si vous placez les caméras à l'intérieur de la forme au lieu de les placer uniquement dans les coins. Il s'agit donc d'une indication utile pour installer des caméras de surveillance dans des lieux de formes différentes et compliquées.

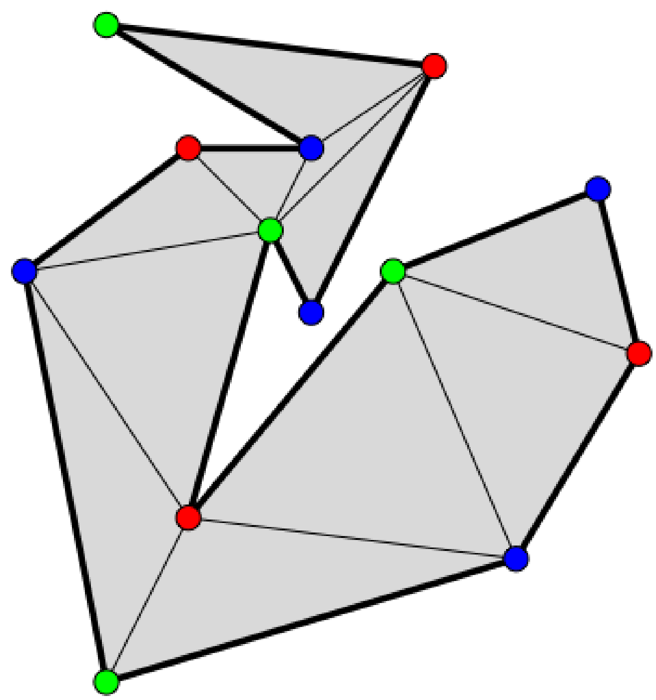
3. Une preuve très élégante et plus simple que celle de Chvátal a été proposée par le mathématicien Steve Fisk en 1978. Elle fournit un **algorithme**, c'est-à-dire un plan étape par étape**,** permettant de déterminer où placer les caméras. Explorons cet algorithme sur la galerie suivante.



- La première étape consiste à diviser la galerie en triangles dont les sommets sont des sommets de la galerie initiale

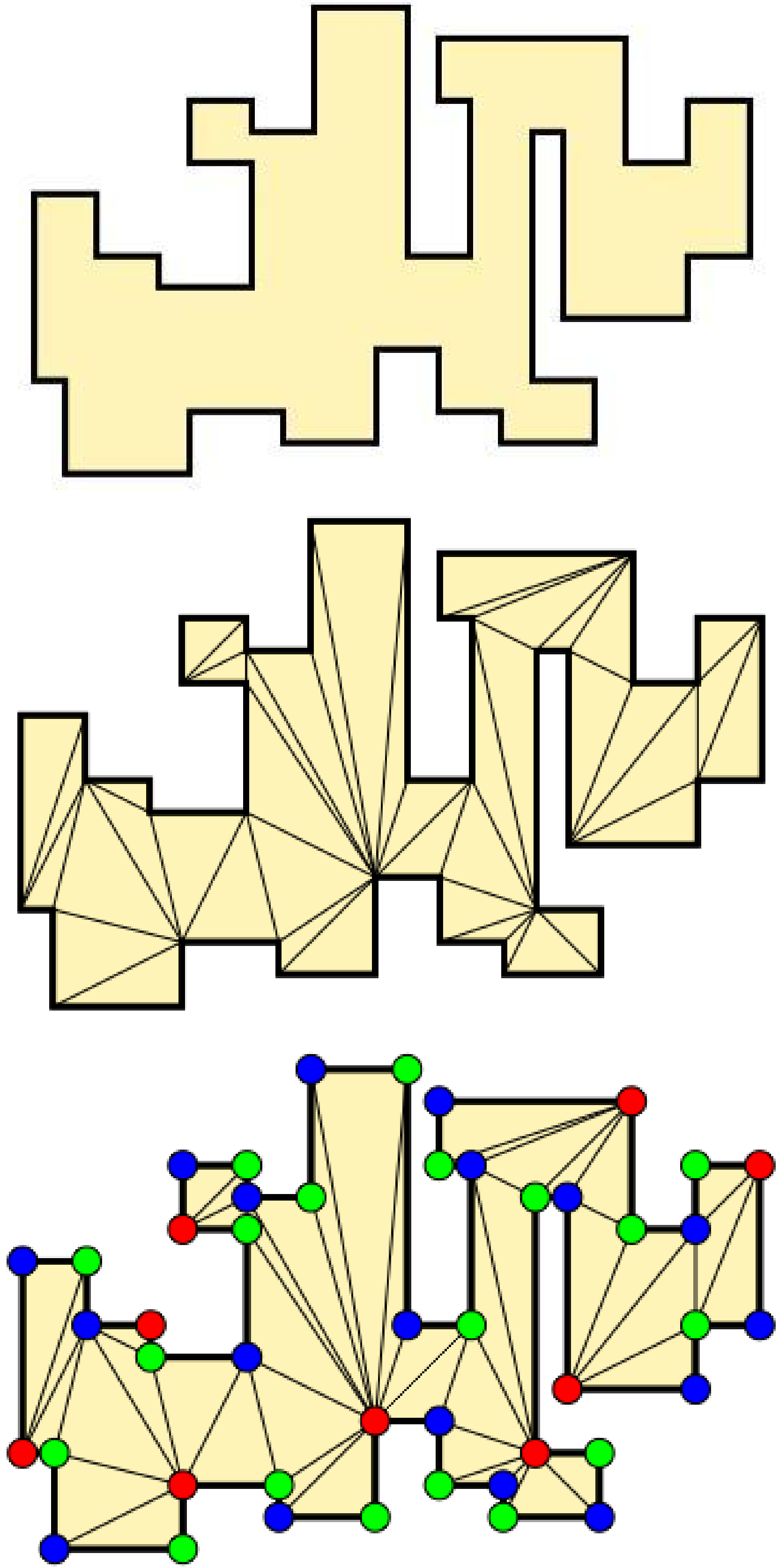


- L'étape suivante consiste à attribuer une des trois couleurs (disons rouge, vert et bleu) à chaque coin, de sorte que chaque triangle se retrouve avec des coins de trois couleurs différentes (c'est toujours possible).



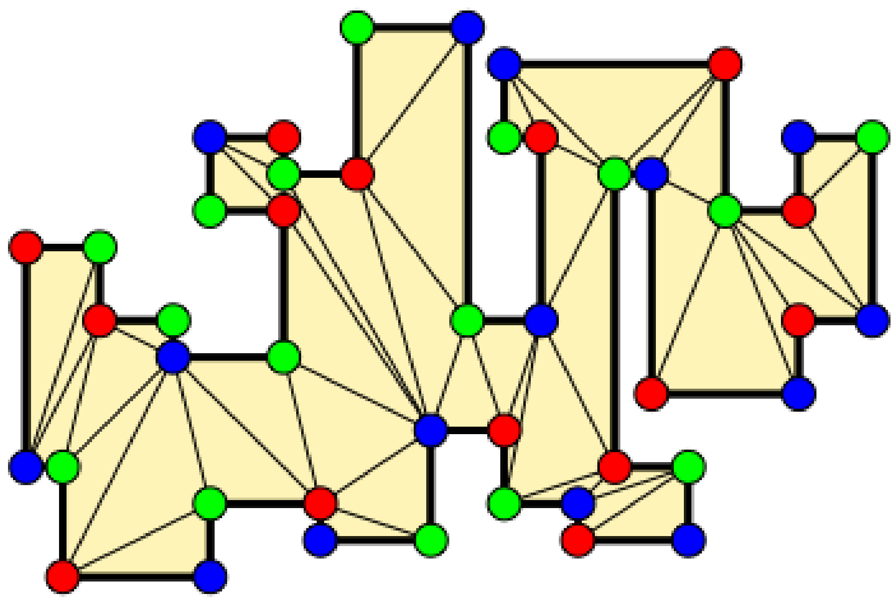
- Choisissez la couleur qui apparaît le moins. Dans ce cas, il y a 4 points de couleur rouge, 4 points de couleur verte et 5 points de couleur bleue. Nous avons donc deux possibilités. Nous pouvons choisir les 4 points rouges et résoudre le problème en plaçant les caméras sur ces points rouges. Nous aurions également pu placer les caméras sur les quatre points verts. Dans les deux cas, les quatre caméras suffisent à tout surveiller.

- Voici un exemple plus compliqué

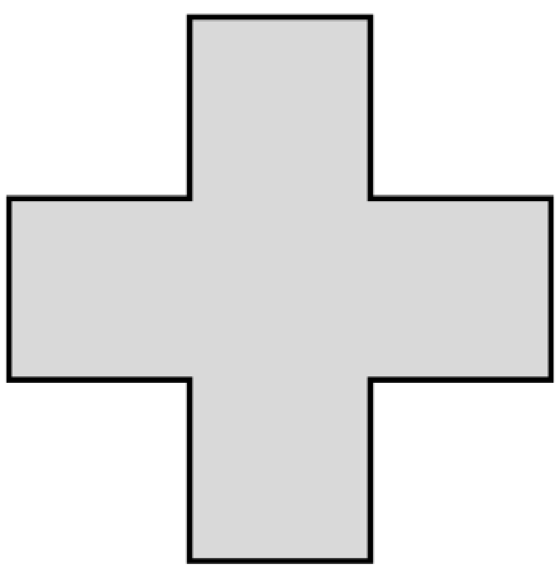


Dans ce cas, on a 9 points rouges, 18 points bleus et 19 points verts. Alors, en plaçant les caméras aux points rouges, on obtient une solution du problème.

Il y a un autre fait intéressant à propos de cet algorithme : Ci-dessous, vous trouverez une image de la même galerie mais avec des triangles différents de ceux de l'image précédente. On dit que "la *triangulation* n'est pas unique", ce qui signifie qu'il existe différentes possibilités de diviser une galerie en triangles. Avec différents triangles, nous avons également différentes couleurs de points à chaque coin des triangles. Cela signifie que pour une galerie, il existe plus d'une solution pour placer les caméras. Dans la nouvelle triangulation ci-dessous, il y a 15 points rouges, 15 points bleus et 16 points verts. Il faut donc 15 caméras, qui peuvent être placées soit sur les points rouges, soit sur les points bleus. Cette solution n'est pas aussi économique que la précédente. L'algorithme de Fisk donne des solutions, mais elles ne sont pas toujours optimales.

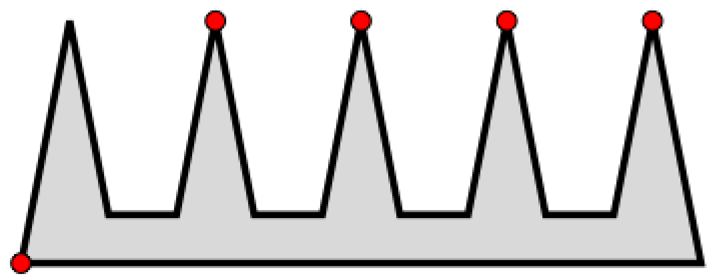


- Trouvez différentes façons de diviser ce polygone en triangles et étudiez l'emplacement des caméras dans chaque cas.



Il existe de bien meilleures solutions que celles fournies par l'algorithme. Ces solutions ne comportent qu'une seule caméra. Pouvez-vous les trouver ?

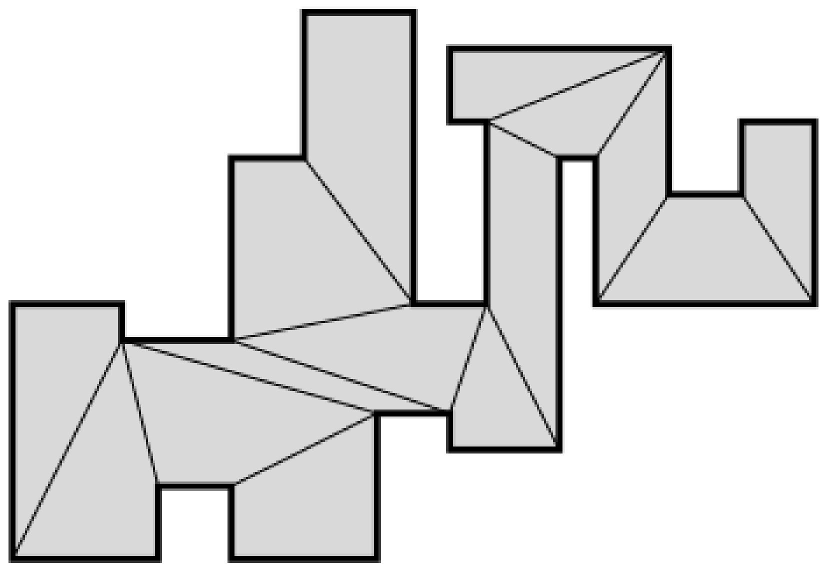
- Dessinez une triangulation pour laquelle l'algorithme fournit la solution ci-dessous (certains triangles sont très fins) :



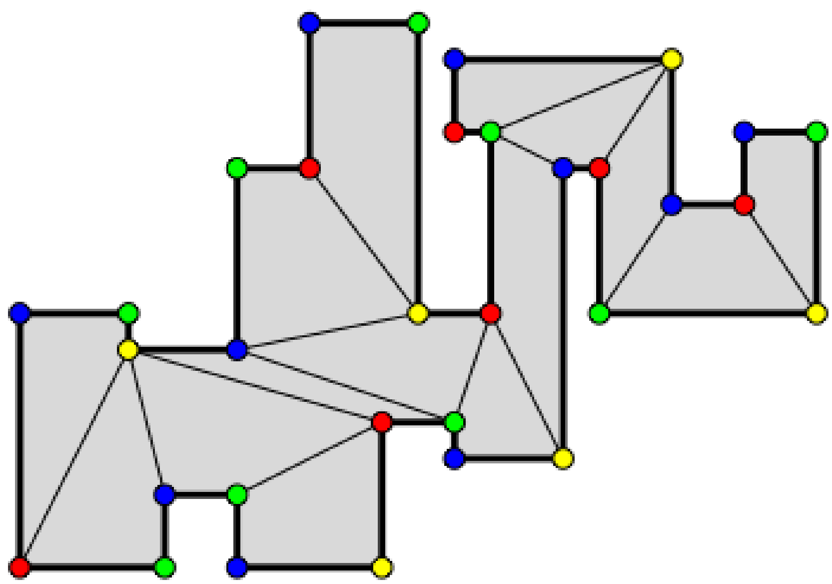
4. Dessinez d'autres polygones et explorez l'algorithme sur ceux-ci.

5. En 1980, Jeff Khan, Maria Margaret Klawe et Daniel J. Kleitman ont trouvé une règle plus économique pour un type de forme particulier, une galerie ne comportant que des angles droits. Une telle galerie est appelée *galerie orthogonale*. Comme ci-dessus, vous pouvez utiliser un certain nombre de caméras pour surveiller l'ensemble de l'intérieur de la galerie. Ce nombre de caméras n'est pas le même que dans le cas de la forme plus générale de la galerie d'art. Ici, vous ne divisez pas le nombre de côtés par 3 (comme ci-dessus), mais par 4 – et vous tronquez à nouveau les décimales. Ainsi, si la galerie a 20 côtés, au plus 5 caméras suffiront toujours. Si la galerie a 8 côtés, deux caméras au maximum suffisent. Comme un quart est plus petit qu'un tiers, cela signifie que les galeries d'art qui n'ont que des angles droits ont en général besoin de moins de caméras !

   L'idée de base ici est similaire à celle que nous avons vue précédemment. Nous voulons à nouveau diviser notre galerie d'art en formes plus petites. Mais comme notre galerie d'art a la particularité de n'avoir que des angles droits, il est maintenant possible de la diviser en formes à quatre côtés appelées *"quadrilatères"*. Les quadrilatères doivent être "convexes". Cela signifie que les quadrilatères ont des côtés droits et des angles qui ne sont pas courbés vers l'intérieur. (Cela n'était pas possible dans le cas de la galerie d'art plus générale !)

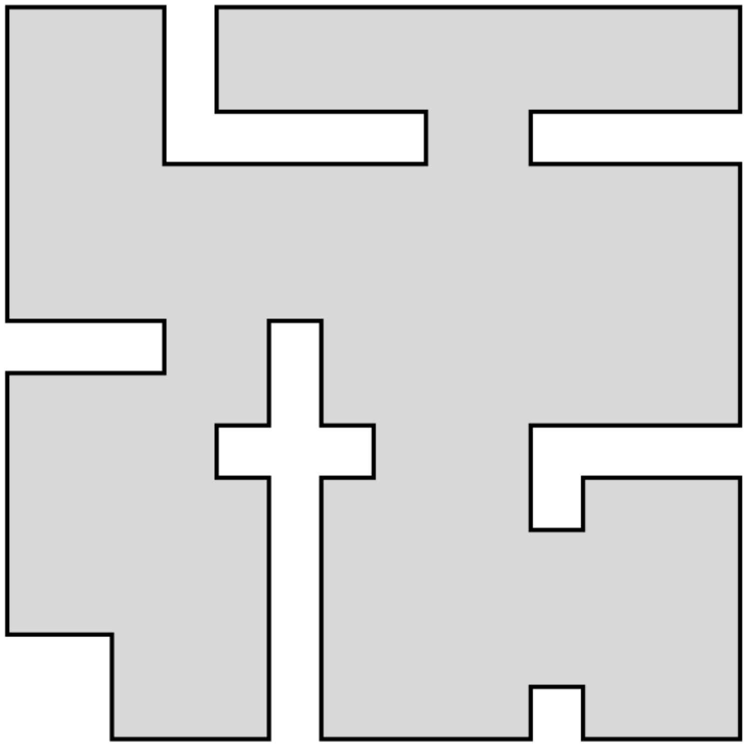


On peut ensuite colorer les sommets avec quatre couleurs, de sorte que les quatre sommets de chaque quadrilatère soient colorés avec les quatre couleurs.



Il y a 6 sommets jaunes, 7 sommets rouges, 9 sommets verts et 10 sommets bleus. Rappelez-vous qu'une caméra placée à n'importe quel sommet d'un quadrilatère convexe peut surveiller l'ensemble du quadrilatère parce qu’il est convexe. Nous plaçons simplement les caméras aux sommets jaunes.

Exécutez l'algorithme pour cette galerie.

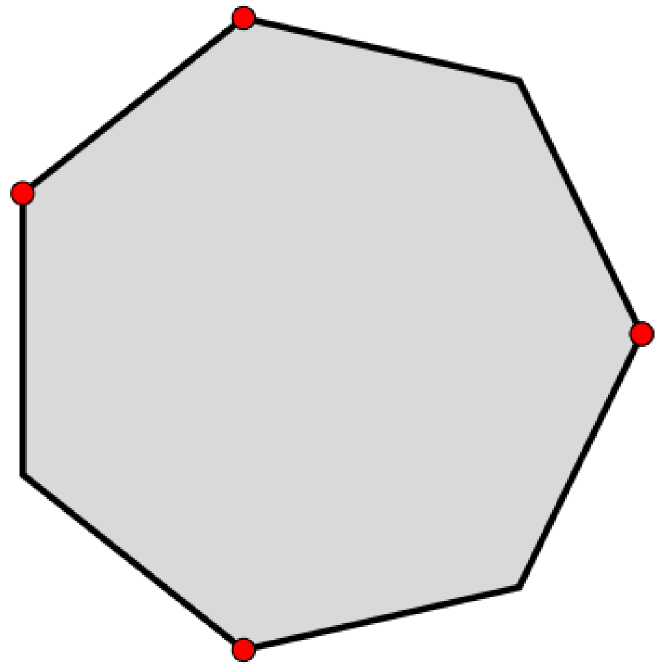


Dessinez d'autres polygones orthogonaux et explorez-les.

Activité 2. Le problème de la forteresse

Imaginez une forteresse, et qu'elle ait la forme d'une figure fermée avec des côtés et des coins. Le défi consiste à trouver comment placer le moins de caméras (ou de gardes) possible à l'intérieur de la forteresse afin que, quel que soit l'endroit où l'on se trouve à l'extérieur de la forteresse, au moins une caméra puisse surveiller cet endroit.
Comme dans le problème de la galerie d'art, nous ne pouvons placer des caméras qu'aux coins de la forme.

Étant donné toutes les forteresses ayant le même nombre de côtés, nous pouvons trouver un nombre de caméras suffisant pour toutes ces forteresses. Ce nombre de caméras est le nombre de côtés divisé par 2, et le résultat est arrondi au nombre entier supérieur. Ainsi, pour une forme à 7 côtés, il faut au maximum 4 caméras (parce que la moitié de 7 est 3,5, et que nous avons arrondi au nombre entier supérieur, 4).



Dessinez d’autres forteresses et explorez-les.

Contexte mathématique et ressources :
Les formes fantaisistes de la galerie d'art que nous avons décrites ci-dessus peuvent être décrites mathématiquement comme des "*polygones*". Un polygone est une forme simple et fermée obtenue en reliant des segments de droite. Le terme "simple" signifie que les segments de droite ne se croisent pas, et le terme "fermée" signifie que les segments de droite se connectent pour former une forme complète sans espace. Par exemple, un triangle est un polygone à trois côtés, un carré est un polygone à quatre côtés, tandis qu'une croix n'est pas un polygone. Les côtés se rejoignent en des points, qui sont les coins de la forme. Ces coins sont également appelés sommets.
Les triangles, qui sont les polygones les plus simples, peuvent être considérés comme les éléments de base des polygones. On peut construire toutes les formes de polygones en combinant différents triangles. Par conséquent, il est également possible de faire l'inverse et de trouver les triangles qui composent un polygone. Ce processus de division d'un polygone en triangles est appelé "*triangulation*".

Si vous voulez en savoir plus, vous pouvez consulter le site Wikipedia.

Et si vous lisez l’anglais, voici un livre que nous vous recommandons : *Art Gallery Theorem and Algorithms*, par Joseph O'Rourke, Oxford, University Press, 1987. Ce livre peut être consulté ou téléchargé ici.

Créez et partagez !
Partagez les galeries des participants et les forteresses que vous avez créées en utilisant les hashtag **#idm314gallery** et **#idm314**.

© 2023 Christiane Rousseau
Ce texte est soumis à une licence internationale Creative Commons Attribution 4.0.