Los problemas de la galería de arte y de la fortaleza

Participantes:

A partir de 10-12 años (dependiendo de la actividad).
No se requieren conocimientos matemáticos previos.

Preparativos:

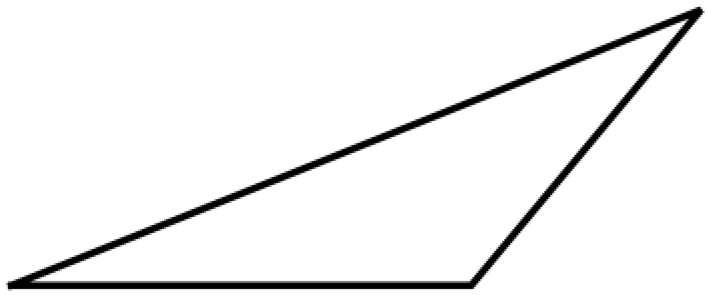
Plantillas impresas, lápices de cuatro colores diferentes (por ejemplo, rojo, verde, azul y amarillo).
Hojas en blanco para crear tus propias galerías.
Otra posibilidad es realizar la actividad en la calle con tizas de colores.

Actividad 1. Proteger la galería de arte con cámaras

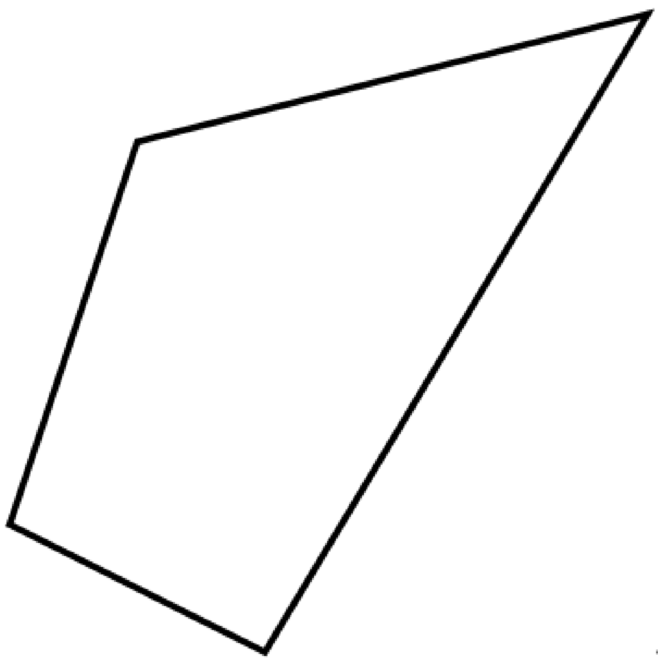
Imagina que estás en una galería de arte llena de obras asombrosas. La galería no tiene la forma habitual de un rectángulo o un cuadrado, sino que su planta tiene una forma muy extravagante con muchas esquinas y giros. La forma está formada por líneas rectas que se unen en las esquinas (en matemáticas se llama polígono). Tu misión es colocar estratégicamente cámaras en puntos específicos de la galería para asegurarte de que todos los puntos de la galería pueden verse y están vigilados. Pero aquí está el truco: tienes que utilizar el menor número posible de cámaras. Estas cámaras sólo pueden colocarse en las esquinas de la galería, pero pueden ver en cualquier dirección desde donde estén colocadas. Esto se conoce como el "Problema de la Galería de Arte".

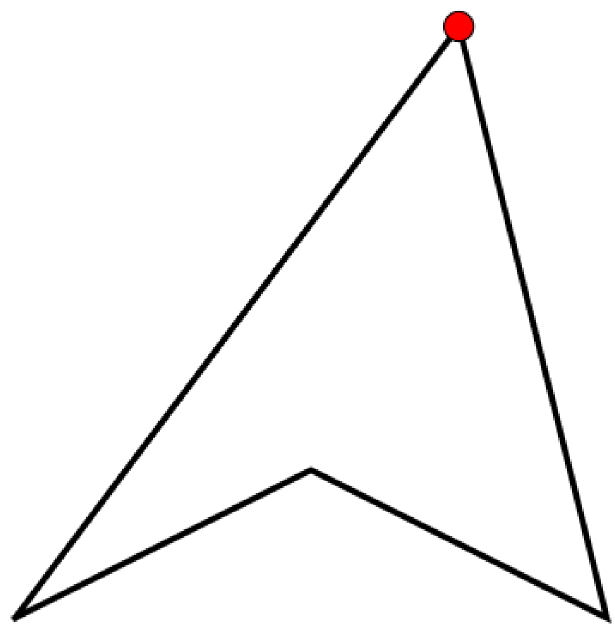
Con un lápiz, puedes trazar líneas rectas partiendo de la cámara para trazar el área que ésta puede ver. Recuerda que no puede ver a través de las paredes. También puedes trazar la línea de visión de la cámara con una regla para ver lo que la cámara puede abarcar.

1. Empecemos a explorar algunos casos sencillos:
   - Para una galería con disposición triangular, una cámara es suficiente y puede colocarse en cualquier esquina (vértice):

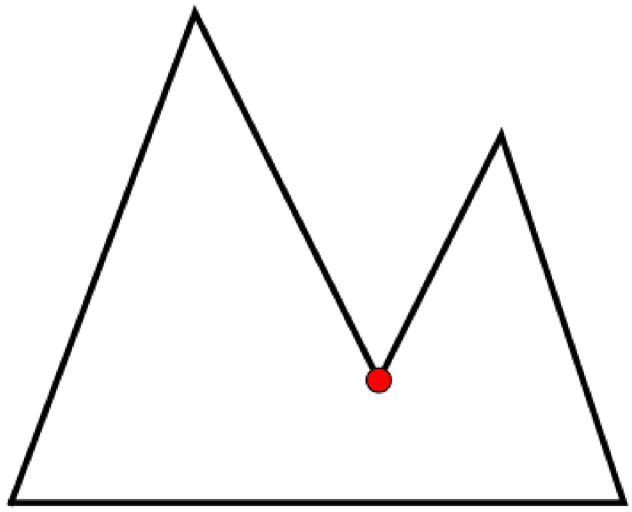


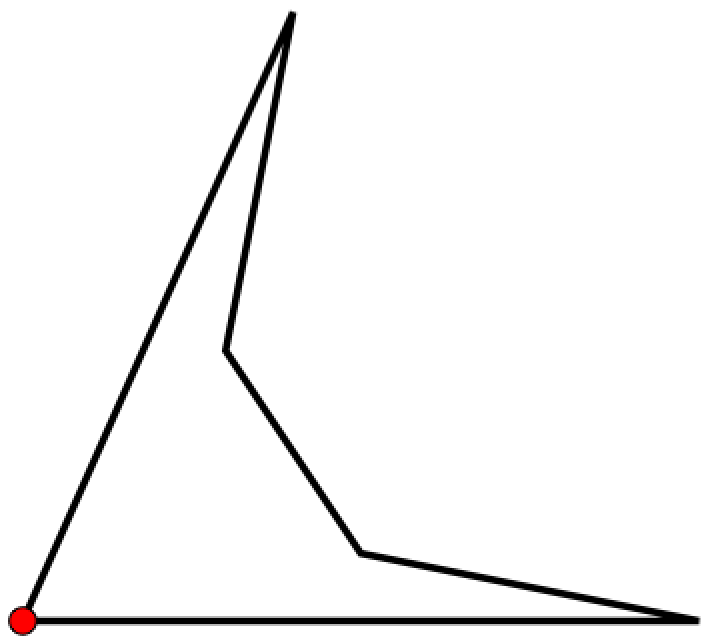
- En una galería de cuatro lados (llamada *cuadrilátero)*, también sólo se necesita una cámara. Si se trata de una forma sencilla con las esquinas apuntando hacia fuera ("convexa"), se puede colocar la cámara en cualquier esquina, véase la imagen inferior izquierda. Si la disposición es más compleja con algunas esquinas apuntando hacia dentro ("cóncava"), hay que elegir la posición de la cámara con más cuidado para cubrirlo todo, véase la imagen inferior derecha. Para la galería de la derecha, es posible una segunda posición de la cámara. ¿Puedes encontrarla?

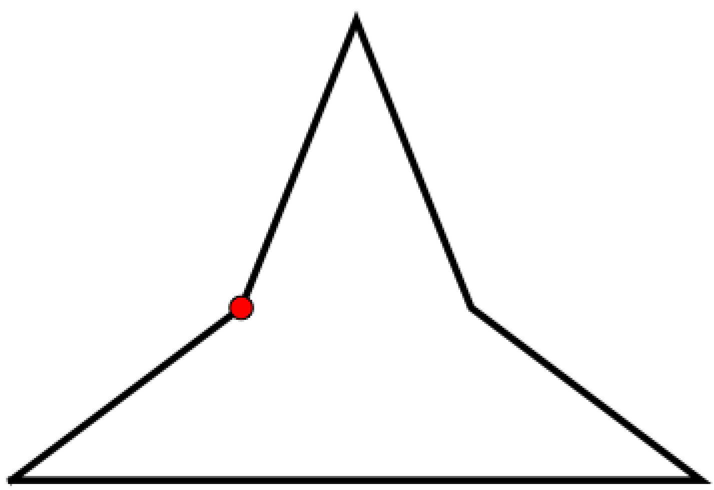




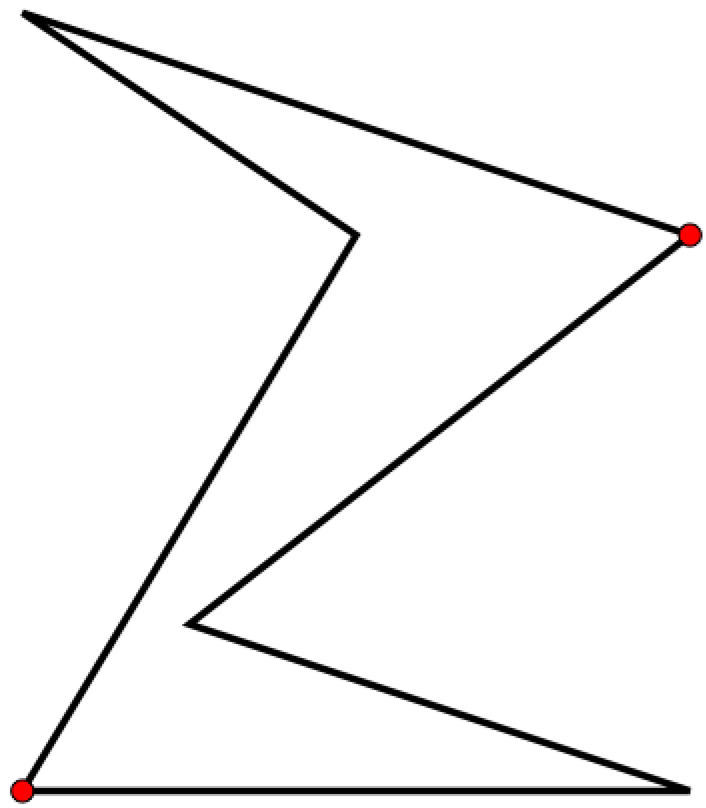
- Una sola cámara también es suficiente en una galería con cinco lados (una planta *pentagonal*). Siempre es posible colocar una única cámara en una esquina, desde la que se puede ver todo el interior de la galería. Vea las imágenes siguientes:



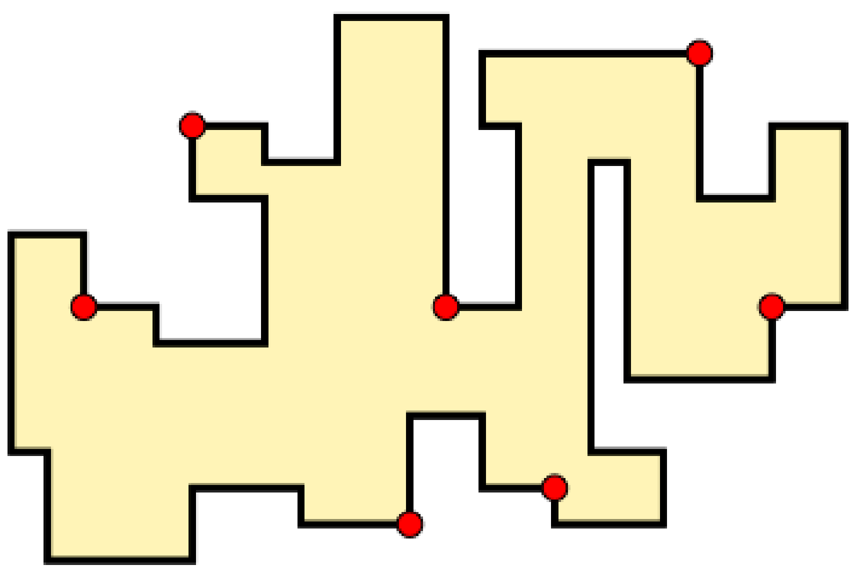




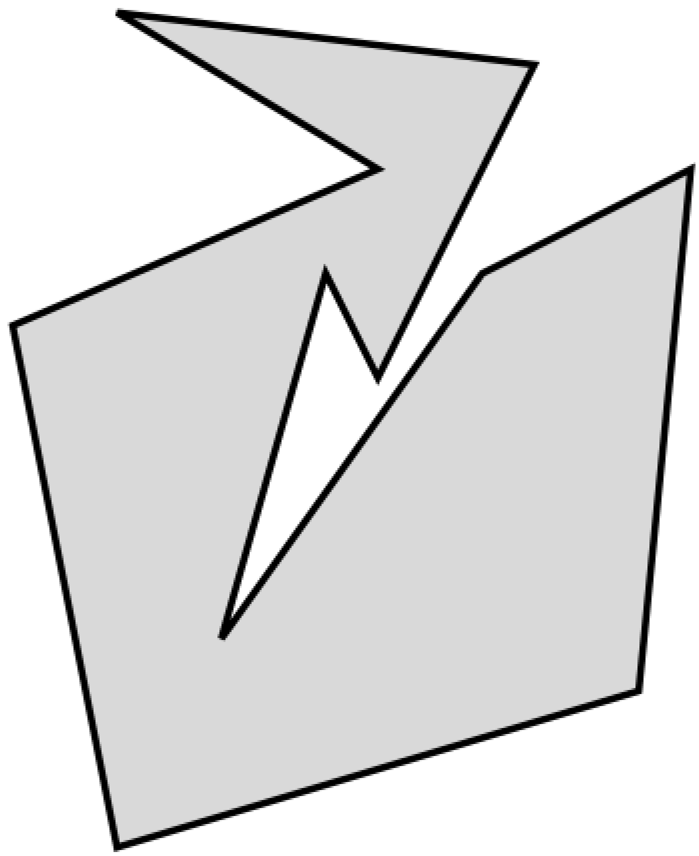
- Sin embargo, se necesitan dos cámaras para la siguiente galería con seis lados:



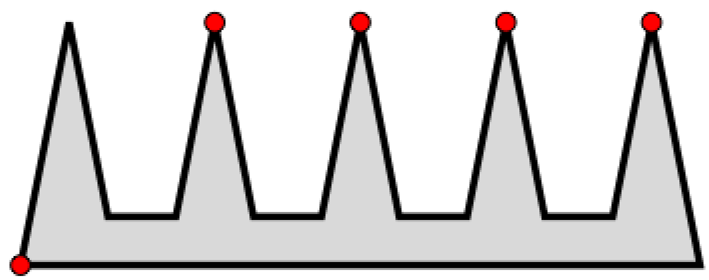
- Puedes comprobar que siete cámaras son suficientes para esta galería:



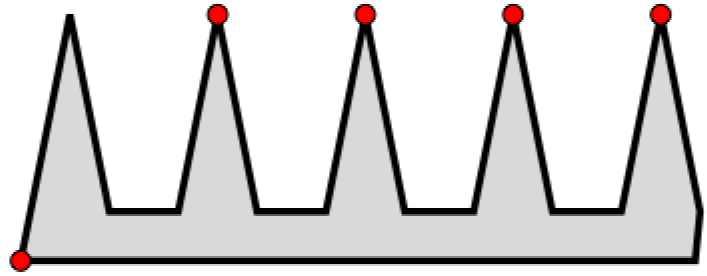
- ¿Puedes colocar sólo dos cámaras para observar la siguiente galería?

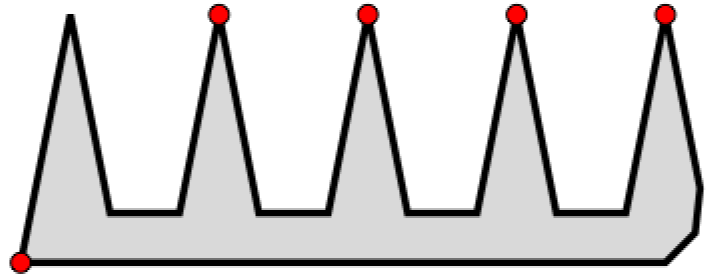


2. Pasamos ahora a una regla matemática. En la galería de arte de abajo, con 15 lados, se necesitan al menos 5 cámaras para cubrirla por completo.



No se pueden utilizar menos de 5 cámaras y seguir viéndolo todo. Lo mismo ocurre con estas dos galerías de 16 y 17 lados.

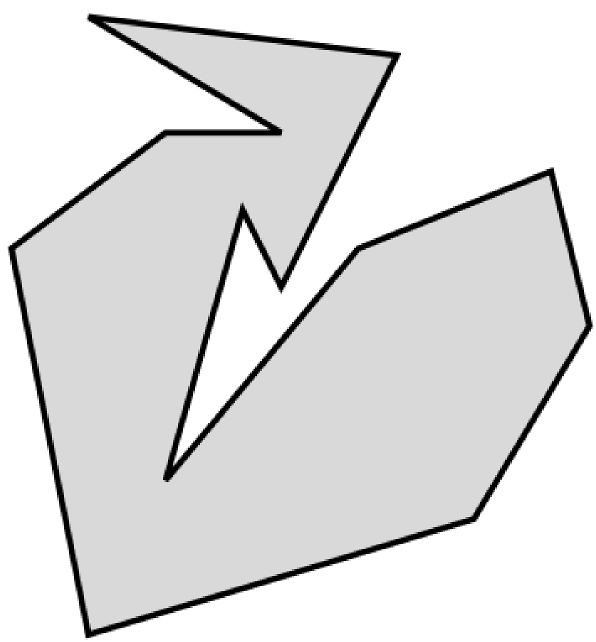




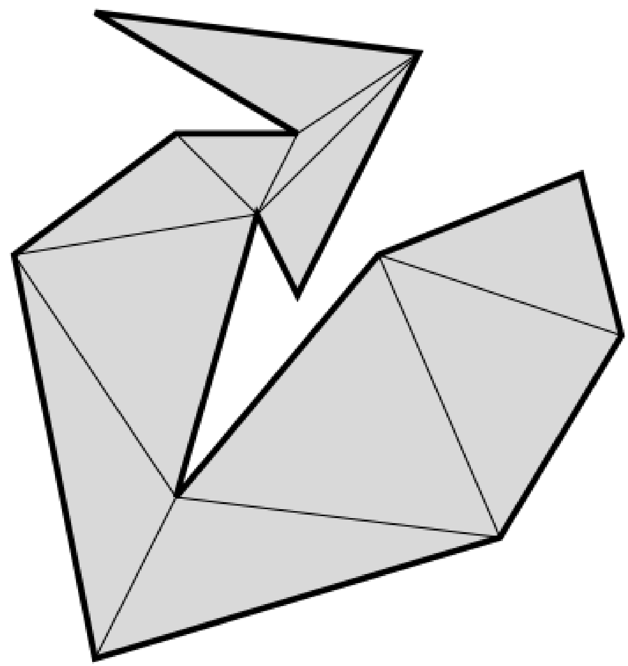
Observe que 5 es el cociente de la división de 15, o 16, o 17 por 3. Repase todos los ejemplos anteriores y compruebe que, en todos los casos, se puede ver toda la galería con un número de cámaras como máximo igual al cociente de la división del número de lados por 3.

El matemático Václav Chvátal demostró en 1975 que un número de cámaras igual al cociente de la división del número de lados por 3 es suficiente para cualquier galería. A modo de ejemplo: para galerías de 6 lados serían 2 cámaras, para galerías de 10 lados serían 3 cámaras, para galerías de 23 lados serían 7. Curiosamente, la regla de Chvátal sigue funcionando si se colocan las cámaras dentro de la forma en lugar de sólo en las esquinas. Por tanto, es una pauta útil para colocar cámaras de vigilancia en lugares con formas diferentes y complicadas.

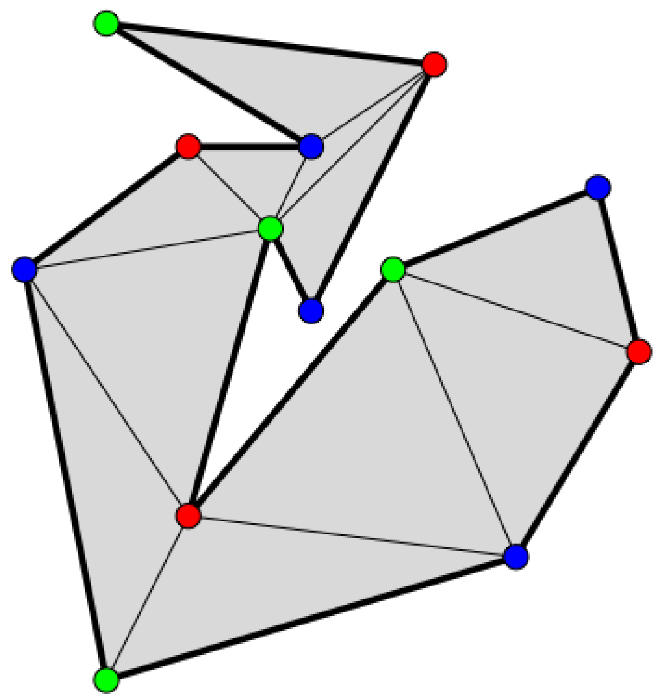
3. Una prueba muy elegante y más sencilla que la de Václav Chvátal fue propuesta por el matemático Steve Fisk en 1978. Proporciona un **algoritmo**, o un plan paso a paso, para saber dónde colocar las cámaras. Veamos cómo funciona este algoritmo en la siguiente galería:



- El primer paso consiste en dividir nuestra galería de arte en triángulos. Las esquinas de los triángulos están en los mismos lugares que las esquinas de la galería de arte original:

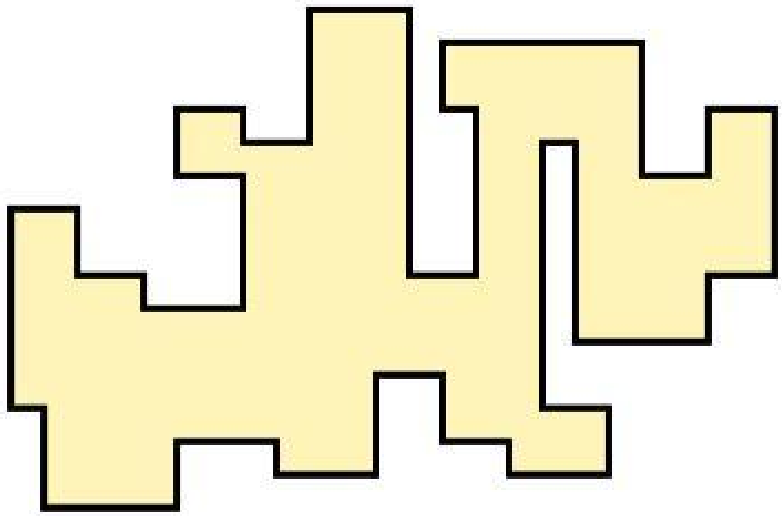


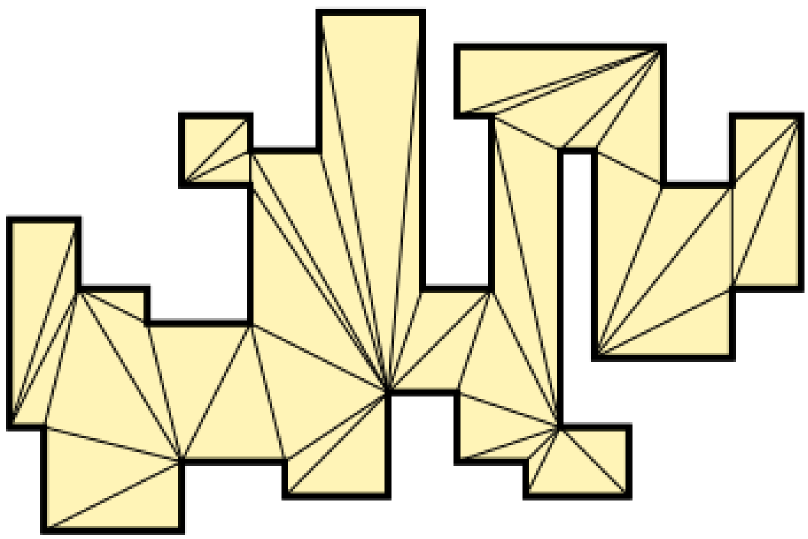
- El siguiente paso es asignar uno de los tres colores (digamos rojo, verde y azul) a cada esquina, de modo que cada triángulo acabe teniendo esquinas de tres colores diferentes (esto siempre es posible).

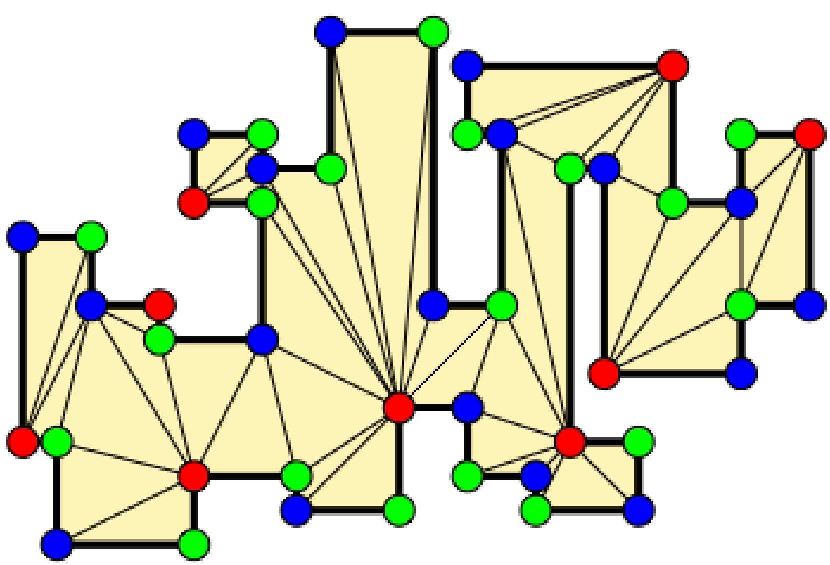


- Elige el color que aparezca menos. En este caso, hay 4 puntos con el color rojo, 4 con el verde y 5 con el azul. Por lo tanto, tenemos dos opciones. Podemos elegir los 4 puntos rojos y resolver el problema colocando las cámaras en estos puntos rojos. También podríamos haber colocado las cámaras en los cuatro puntos verdes. En ambos casos, las cuatro cámaras bastan para vigilarlo todo.

- Aquí tenemos un ejemplo más complicado:

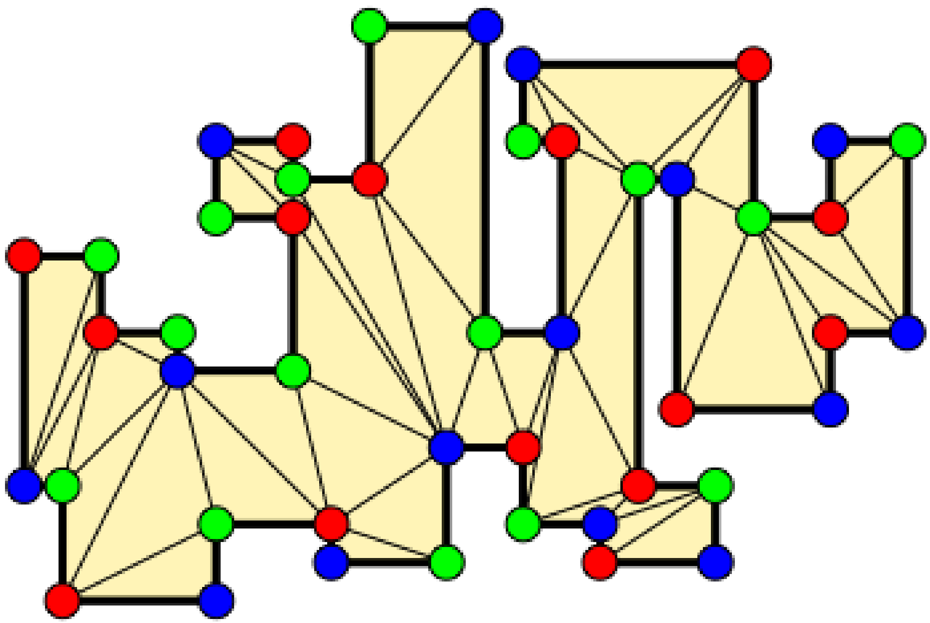




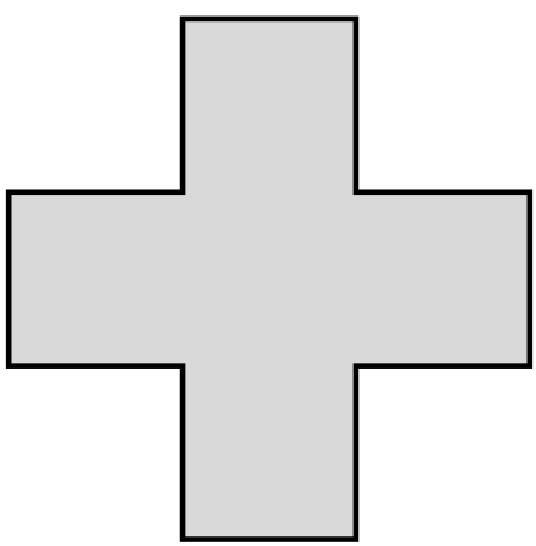


En este caso, tenemos 9 puntos rojos, 18 azules, y 19 verdes. Así, colocando las cámaras en las 9 esquinas rojas resolvemos este ejemplo.

Hay otro dato interesante sobre este algoritmo: Abajo hay una imagen de la misma galería pero con diferentes triángulos que en la imagen anterior. Se dice que "la triangulación no es única", lo que significa que hay diferentes posibilidades sobre cómo se puede dividir una galería en triángulos. Con diferentes triángulos, también tenemos diferentes colores de los puntos en cada esquina del triángulo. Esto significa que para una galería, hay más de una solución al problema de dónde colocar las cámaras. En la nueva triangulación de abajo, hay 15 puntos rojos, 15 azules y 16 verdes. Por tanto, con este método se necesitan 15 cámaras, que pueden colocarse en los puntos rojos o en los azules. Esta solución no es tan económica como la anterior. El algoritmo de Fisk proporciona una solución, pero quizá no es óptima.

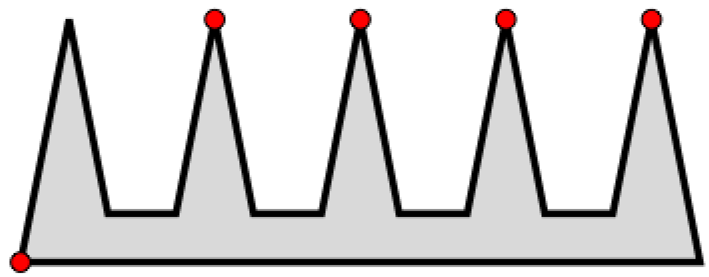


- Encuentra distintas formas de dividir este polígono en triángulos y explora la colocación de las cámaras en cada caso.



Existen soluciones mucho mejores que las proporcionadas por el algoritmo. Estas soluciones sólo tienen una cámara. ¿Puedes encontrarlas?

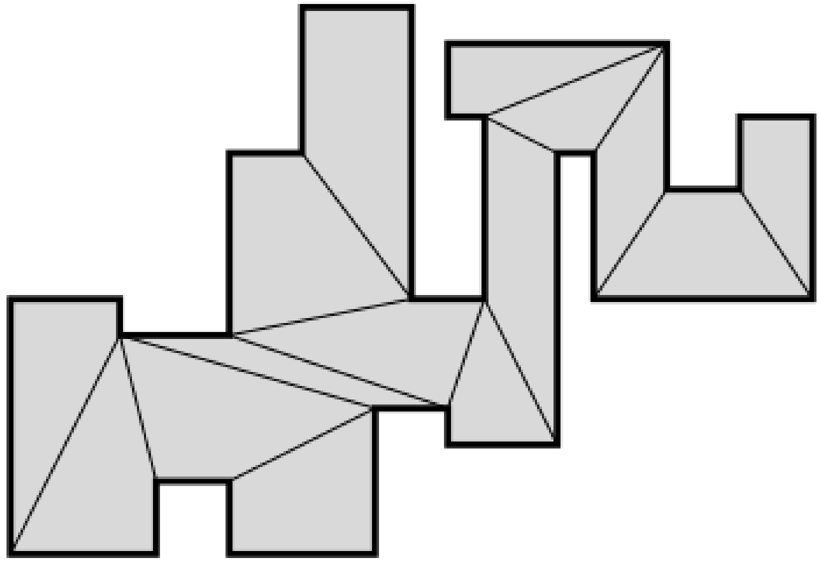
- Dibuja los triángulos para los que el algoritmo proporciona la solución que aparece a continuación (algunos de los triángulos son muy finos):



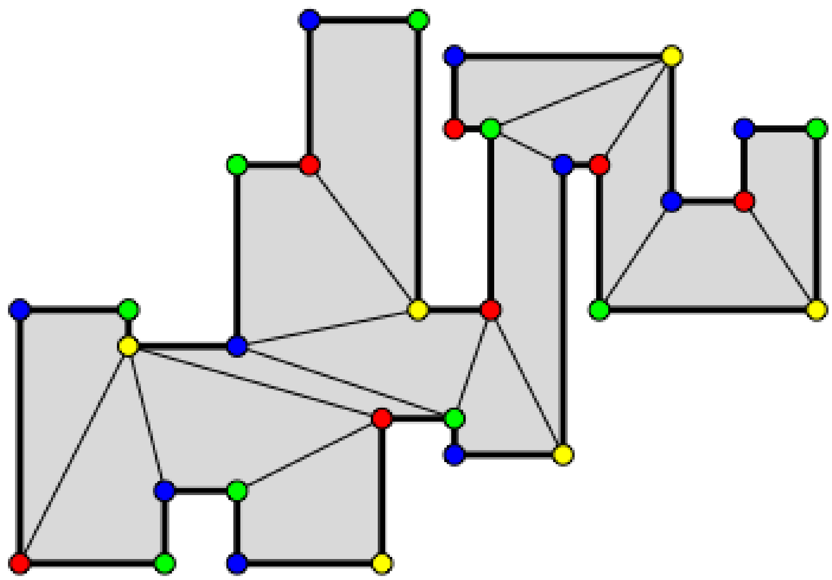
4. Dibuja otros polígonos y explora el algoritmo en ellos.

5. En 1980, Jeff Khan, Maria Margaret Klawe y Daniel J. Kleitman encontraron una regla más económica para un tipo especial de forma, una galería con sólo ángulos rectos. Una galería de este tipo se llama galería ortogonal. Como en el caso anterior, se puede utilizar un número determinado de cámaras para vigilar toda la zona de su interior. Este número de cámaras necesario es diferente que en el caso de la forma más general de galería de arte. En este caso, no hay que dividir el número de lados por 3 (como en el caso anterior), sino por 4, y volver a cortar los decimales. Así, si la galería tiene 20 lados, seguro que como máximo bastan 5 cámaras. Si la galería tiene 8 lados, como máximo bastarán dos cámaras. Dado que un cuarto es más pequeño que un tercio, las galerías de arte que sólo tienen ángulos rectos suelen necesitar menos cámaras.

   La idea básica aquí es similar a lo que hemos discutido antes. De nuevo queremos dividir nuestra galería de arte en formas más pequeñas. Pero como nuestra galería de arte tiene la propiedad especial de tener sólo ángulos rectos, ahora es posible dividirla en formas de cuatro lados llamadas "cuadriláteros". Los cuadriláteros tienen que ser "convexos". Es decir, formas de cuatro lados que tienen lados rectos y ángulos que no están doblados hacia dentro. (Esto no era posible en el caso de la galería de arte más general). Estos cuadriláteros tienen sus esquinas en las esquinas de la galería de arte. Este método no es fácil de realizar ni de demostrar, pero prueba que se puede cubrir eficazmente todo el interior de este tipo de galería de arte con un número determinado de cámaras.

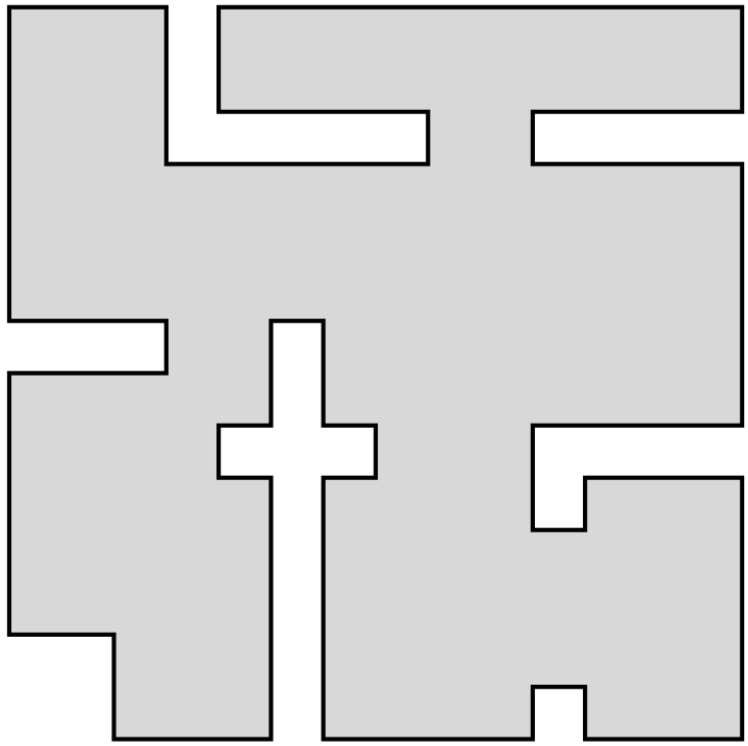


En este caso se pueden colorear los vértices con cuatro colores de forma que los cuatro vértices de cada cuadrilátero estén coloreados con los cuatro colores.



En este ejemplo hay 6 vértices amarillos, 7 rojos, 9 verdes y 10 azules. Recuerda que una cámara situada en cualquier vértice de un cuadrilátero convexo puede vigilar todo el cuadrilátero. Nosotros simplemente colocamos las cámaras en los vértices amarillos.

Ejecuta el algoritmo para esta galería:

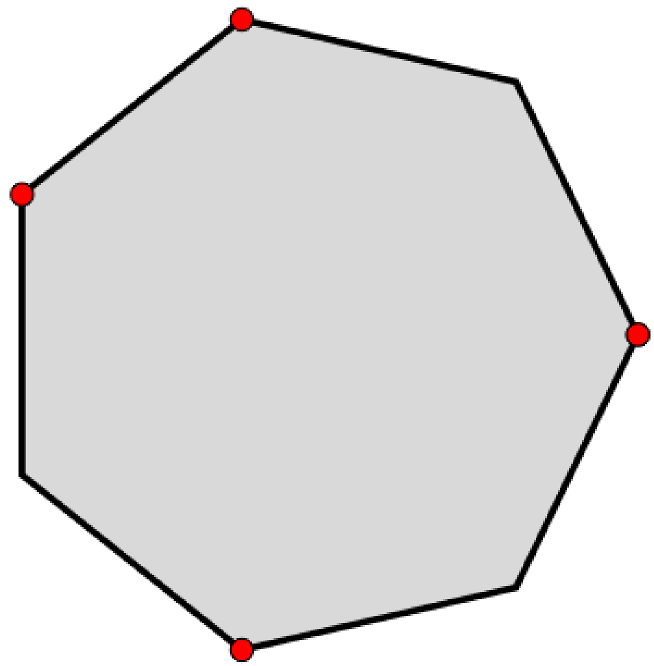


Dibuja otros polígonos ortogonales y explóralos.

Actividad 2. El problema de la fortaleza

Imagina que hay una fortaleza y que tiene forma de figura cerrada con lados rectos. El reto consiste en encontrar la forma de colocar el menor número de cámaras (o guardias) dentro de la fortaleza, de modo que, independientemente de dónde te encuentres *en el exterior* de ella, al menos una cámara pueda ver ese lugar. Al igual que en el Problema de la Galería de Arte, sólo podemos colocar cámaras en las esquinas de la figura.

Dadas todas las fortalezas con el mismo número de lados, podemos encontrar un número de cámaras que sea suficiente para todas estas fortalezas. Este número de cámaras es el número de lados dividido por 2, y el resultado se redondea al número entero superior. Así, para una forma de 7 lados, se necesitarían como máximo 4 cámaras (porque la mitad de 7 es 3,5, y redondeamos al número entero siguiente 4).



Dibuja otras fortalezas y explóralas.

Conceptos matemáticos y recursos:
Las formas de la galería de arte que hemos descrito antes pueden describirse matemáticamente como "*polígonos*". Un polígono es una forma simple y cerrada formada por la unión de líneas rectas. "Simple" significa que las líneas no se cruzan entre sí, y "cerrado" significa que las líneas se conectan para formar una figura completa sin huecos. Por ejemplo, un triángulo es un polígono con tres lados rectos y un cuadrado es un polígono con cuatro lados rectos, mientras que dos líneas que se cruzan en X no forman un polígono. Los lados se unen en unos puntos que son los vértices de la figura. Estas esquinas también se llaman vértices.
Los triángulos, que son los polígonos más sencillos, pueden considerarse los elementos básicos de los polígonos. Se puede construir cualquier forma de polígono combinando diferentes triángulos. Por lo tanto, también es posible hacer el camino inverso y encontrar los triángulos que componen un polígono. Este proceso de dividir un polígono en triángulos se denomina "*triangulación*".

Si quieres saber más, puedes ir a la página de Wikipedia.

Si quieres profundizar más, puedes consultar el libro (en inglés): *Art Gallery Theorem and Algorithms,* de Joseph O'Rourke, Oxford, University Press, 1987. El libro puede descargarse aquí.

¡Crea y comparte!
Comparte las galerías y fortalezas de los participantes que hayas creado utilizando los hashtag **#idm314gallery** y **#idm314.**