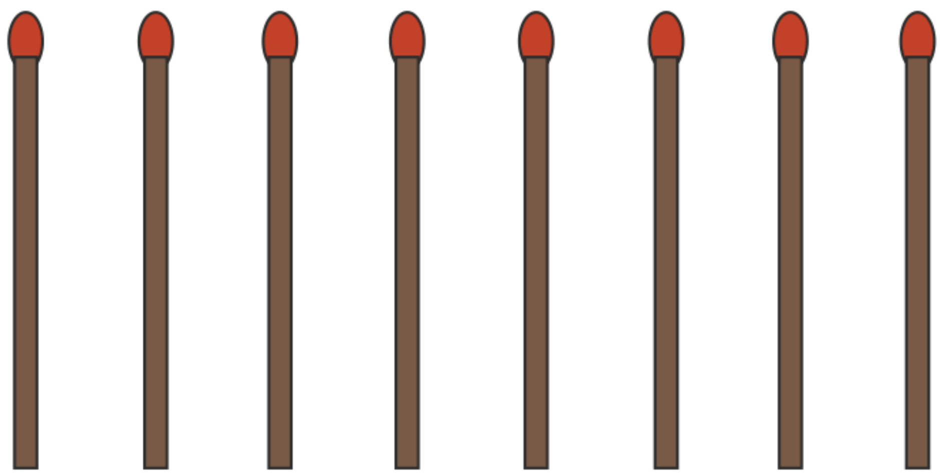
Jeux mathématiques

Participants:
À partir de 10 ans. Certaines activités sont accessibles à partir de 15 ans.

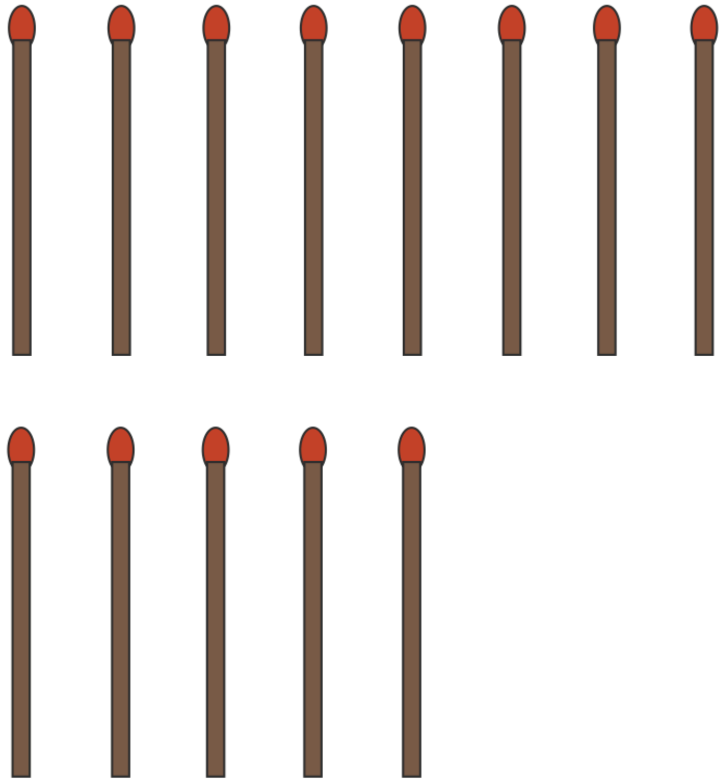
Exploration du jeu de Nim
Il s'agit d'un jeu de stratégie ancien à deux joueurs, dont l'origine est incertaine (peut-être en Chine ?). Il existe de nombreuses variantes.

1. *Première variante* : un nombre quelconque de bâtonnets sont alignés sur une ligne (vous pouvez utiliser des allumettes, des crayons, vos doigts, etc.).



   Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets à son tour. La personne qui gagne est celle qui enlève le dernier bâtonnet: c'est le *jeu gourmand*. Expérimentez différentes stratégies. Montrez que si le nombre de bâtonnets n'est pas divisible par 4 lorsque c'est le tour d'un joueur, alors ce joueur a une stratégie gagnante : en effet, le reste de la division par 4 du nombre de bâtonnets est 1, 2 ou 3. La stratégie consiste à prendre un nombre de bâtonnets égal à ce reste.
2. *Seconde variante* : un nombre quelconque de bâtonnets sont alignés sur une ligne. Chaque joueur peut retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets à son tour. La personne qui perd est celle qui prend le dernier bâtonnet: c'est le *jeu misère*. Montrez que si le reste de la division du nombre de bâtonnets par 4 n'est pas égal à 1 lorsque c'est le tour d'un joueur, alors ce joueur a une stratégie gagnante. Expliquez cette stratégie.

3. Une possibilité est de faire jouer ensemble deux joueurs dont l'un.e a pratiqué le jeu gourmand et l'autre le jeu misère : on joue plusieurs parties en alternant la version jouée, la personne qui commence, et en changeant le nombre de bâtonnets.
4. *Troisième variante* : les bâtonnets sont alignés sur plusieurs rangées et chaque rangée contient un nombre quelconque de bâtonnets.

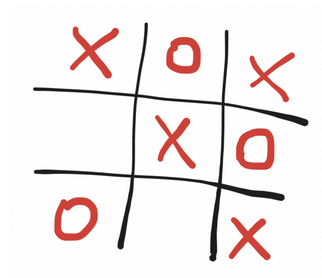


   Les deux joueurs prennent alternativement un nombre quelconque de bâtonnets de n'importe quelle rangée. La personne qui gagne est celle qui prend le dernier bâtonnet.

   a. Expérimentez avec 2 rangées, et montrez que si un joueur peut effectuer un déplacement amenant les rangées au même nombre de bâtonnets : (1, 1), (2,2), (3, 3), (4,4), etc. alors ce joueur a une stratégie gagnante.
   b. Prenez encore deux rangées et changez la règle pour que la personne qui perd soit celle qui prend le dernier bâtonnet. Montrez que si un joueur peut faire un mouvement amenant les rangées au même nombre supérieur à 1 de bâtonnets : (2,2), (3, 3), (4,4), etc., alors ce joueur a une stratégie gagnante.
   c. Expérimentez avec 3 rangées et vérifiez qu'un déplacement vers l'une des configurations suivantes est une stratégie gagnante : (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (1, 8, 9), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (4, 8, 12), (4, 9, 13), (5, 8, 13), (5, 9, 12). (L'idée est qu'en deux coups, vous pouvez passer à une configuration gagnante plus simple, soit apparaissant auparavant dans la liste, ou encore une configuration avec moins de rangées comme en a.).
   d. Expérimentez avec 4 rangées et vérifiez qu'un déplacement vers l'une des configurations suivantes est une stratégie gagnante : (1, 1, n, n) pour tout n, (1, 2, 4, 7), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 5, 7), (2, 3, 4, 5), (2, 3, 6, 7), (2, 3, 8, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 8, 9), (m, m, n, n) pour tous m, n.

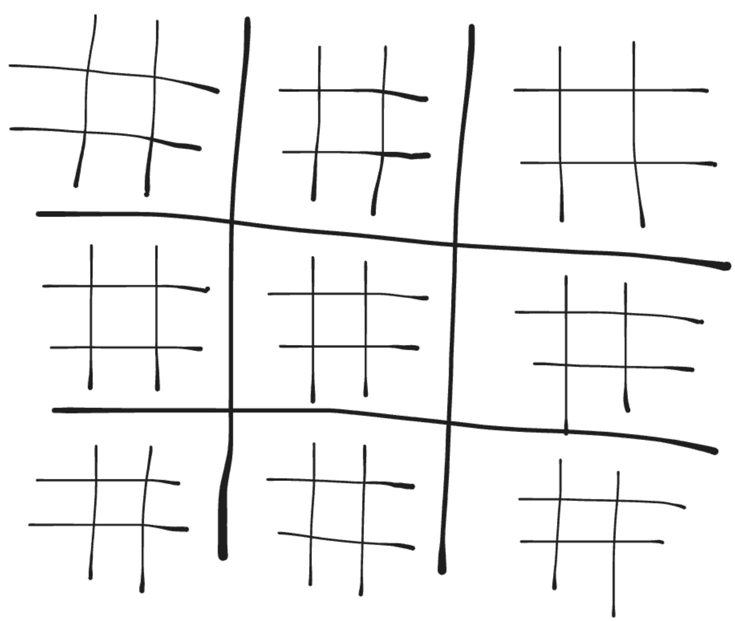
e. Le cas général est pour les 15-18 ans. Il nécessite l'utilisation de la numérotation en base 2. Il est expliqué ci-dessous dans l'annexe 1.

Le jeu du tic-tac-toe et quelques généralisations
Le jeu du **t**ic-tac-toe remonte à l'Égypte ancienne. Il se joue sur une grille 3x3. Le joueur A inscrit un X dans une case. Le joueur B écrit un O dans une autre case. Les joueurs A et B écrivent alternativement des X et des O dans les cases vides. La personne qui gagne est la première qui réussit à aligner trois de ses marques, soit horizontalement, soit verticalement, soit en diagonale.

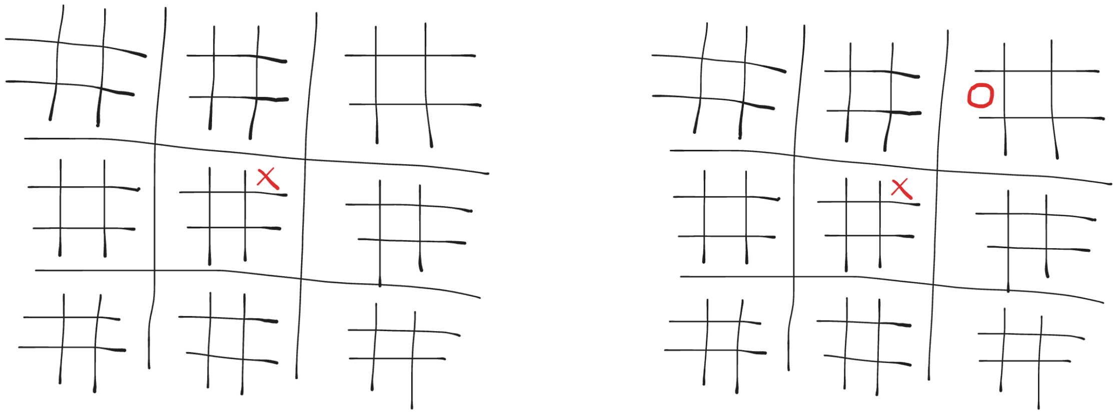


- Montrer que si tous les joueurs jouent intelligemment, personne ne gagne. Cela peut se faire en déterminant un mouvement stratégique pour chaque mouvement possible de l'adversaire.
- Une généralisation consiste à jouer le jeu sur une grille 3x3x3. Faites l'expérience que le joueur A est sûr de gagner s'il place un X au centre au premier coup. Déterminer sa stratégie en fonction des coups du joueur B.
- Le Tic-Tac-Toe peut également se jouer sur une grille 4 x 4. Le gagnant est le premier joueur qui place 4 de ses marques dans une rangée horizontale ou verticale, ou dans un carré de 2 x 2, ou aux quatre coins de la grille. Expérimentez des stratégies pour ce jeu.

Le jeu Ultimate tic-tac-toe
Dans une grande grille 3x3, chaque case contient une plus petite grille 3x3 pour jouer au tic-tac-toe.



Le premier joueur peut jouer avec son symbole (X ou O) dans n'importe quelle petite grille. Chaque coup détermine laquelle des petites grilles sera utilisée au tour suivant. Par exemple, si le premier joueur place un X dans la case supérieure droite de la petite grille centrale, le joueur suivant doit placer un O quelque part dans la petite grille située dans le coin supérieur droit de la grande grille.

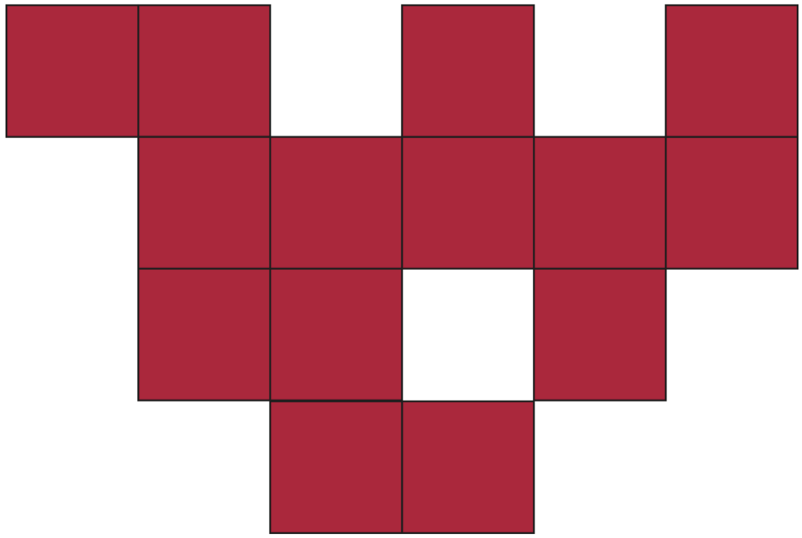


Exemple des trois premiers coups. Le joueur 1 peut jouer n'importe où. Au coup suivant, le joueur 2 doit placer un O quelque part dans la petite grille en haut à droite. Au coup suivant, le joueur 1 doit placer un X quelque part dans la petite grille située à gauche dans la rangée 2.

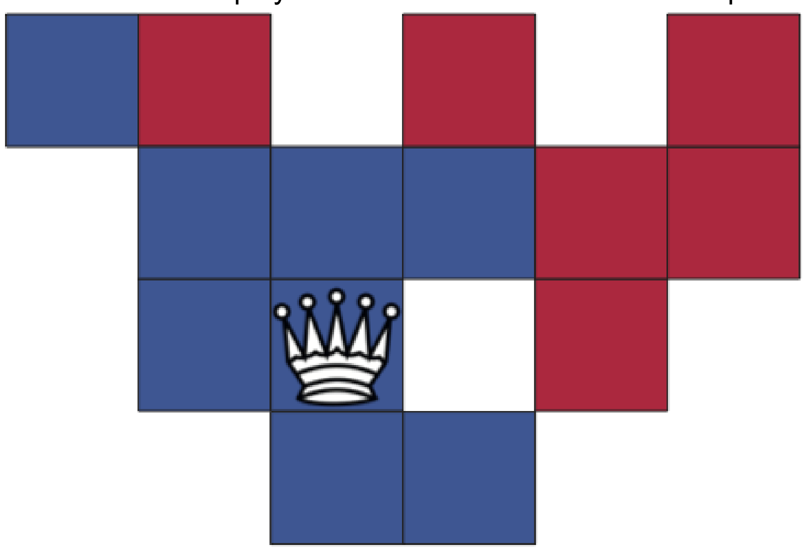
Chaque fois qu'un joueur réussit à aligner trois X ou trois O dans une petite grille, cette case de la grande grille lui appartient. La gagnante est la personne qui parvient à remporter la grande grille de tic-tac-toe en gagnant trois petites grilles de tic-tac-toe alignées.
Si un joueur est envoyé sur une grille qui est déjà pleine ou qui a déjà été gagnée par un autre joueur, il peut choisir n'importe quelle autre petite grille pour placer le prochain X ou O.

Des reines sur des échiquiers
Ce jeu se joue en solitaire. Sur un échiquier, les reines peuvent se déplacer horizontalement, verticalement et en diagonale. Une reine est menacée par une autre reine si cette dernière peut se déplacer jusqu'à la position de la première reine, que ce soit horizontalement, verticalement ou en diagonale.

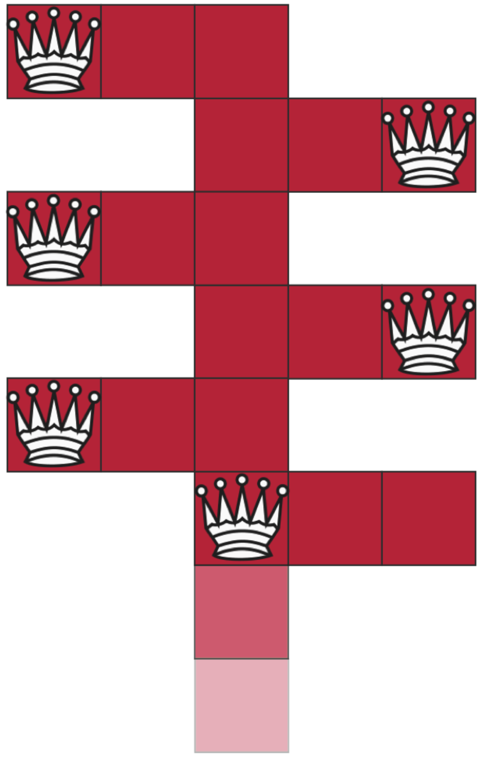
a. Prenez un échiquier 4x4 et placez quatre reines telle sorte qu'aucune reine n'en menace une autre.
b. Même question avec un échiquier 5x5 et cinq reines.
c. Même question avec un échiquier 6x6 et six reines.
d. Il est possible de généraliser la forme de l'échiquier à un polyomino, qui est un ensemble de cases carrées reliées entre elles, chaque case étant adjacente à au moins une autre case par un côté.



La question est alors de déterminer le nombre minimal de reines nécessaires pour menacer toutes les cases du polyomino. Voici les cases menacées par une reine.



- Pour le polyomino ci-dessus, trois reines suffisent. Pouvez-vous les placer ?
- Le résultat général est que si le polyomino a n cases, il sera toujours possible de menacer toutes les cases avec au plus m reines, où m est la partie entière de $n/3$. Dans l'exemple suivant, qui comporte 18 cases (ou 19 ou 20 si l'on ajoute une des cases transparentes du bas), il n'est pas possible d'utiliser moins de 6 reines pour menacer toutes les cases.



Ceci peut être généralisé à un polyomino de $3n$ cases (ou $3n + 1$, ou $3n + 2$ cases) pour lequel au moins n reines sont nécessaires pour menacer toutes les cases.

- Dessinez d'autres polyominos et déterminez dans chaque cas le nombre minimum de reines nécessaire pour menacer toutes les cases.
- Montrez qu'au plus m reines suffisent, où m est la partie entière de $\frac{n}{3}$ (ceci est pour les 15 à 18 ans). La méthode est expliquée ci-dessous à l'annexe 2.

Créez et partagez!
Créez de nouvelles règles pour les jeux mentionnés ci-dessus et partagez-les en utilisant les hashtags **#idm314games** et **#idm314**.

Références
Pour le Ultimate tic-tac-toe
https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_tic-tac-toe
Pour jouer en ligne avec l’intelligence artificielle: https://www.uttt.ai/

Pour les reines sur un polyomino :
https://accromath.uqam.ca/2022/09/des-dames-sur-detranges-echiquiers/
Pour jouer en ligne: www.erikaroldan.net/queensrooksdomination

Annexe 1. Le cas général du jeu de Nim
Considérons un jeu de Nim avec m rangées, contenant respectivement n_1, …., n_m bâtonnets. Écrivez chacun des nombres n_1, …., n_m en base 2. Chaque nombre est alors une somme de puissances 2^i pour un certain $i = 0,$ …., N. Comptez combien de fois une puissance 2^i donnée apparaît dans l'ensemble des n_1, …., n_m. Si une puissance 2^i apparaît un nombre pair de fois, alors posez $a_i = 0$. Si elle apparaît un nombre impair de fois, alors posez $a_i = 1$. Voici un exemple. Nous avons trois lignes avec respectivement 9, 5 et 6 bâtonnets. D'où

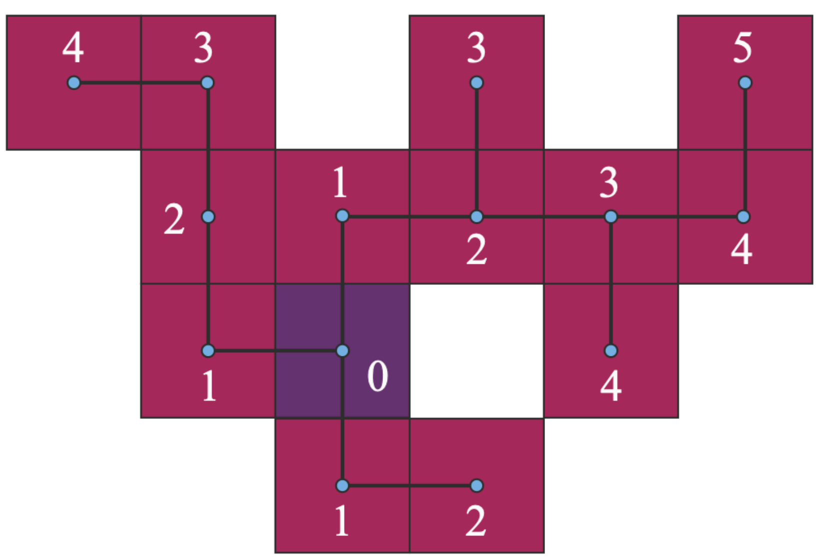
$n_1 = 9 = 2^3 + 2^0$, $n_2 = 5 = 2^2 + 2^0$, $n_3 = 6 = 2^2 + 2^1$. Alors, $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$.

Affirmation : une stratégie gagnante pour un joueur est d'effectuer un coup amenant tous les a_i à 0.

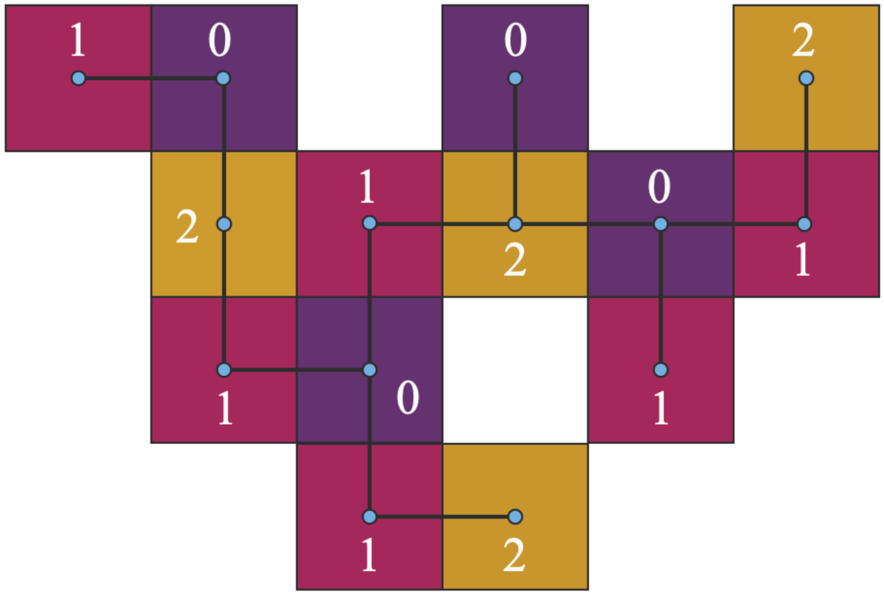
1. Montrez que si tous les $a_i = 0$, $i = 0,$ …., N, alors n'importe quel mouvement amènera au moins un a_i à être non nul.
2. Montrez que si certains a_i sont non nuls, il existe un moyen d'enlever certains bâtonnets d'une rangée de manière à ramener tous les a_i à 0.

Il est recommandé d'expérimenter avec plusieurs exemples avant d'essayer de prouver la règle générale.

Annexe 2. Un algorithme pour placer les reines sur un polyomino
Prenons un polyomino et marquons le centre des carrés. Nous pouvons supposer que les carrés ont des côtés de longueur 1. Nous décidons de marquer un carré central et de mesurer la distance minimale entre son centre et le centre des autres carrés lorsque nous nous déplaçons horizontalement ou verticalement d'un centre à l'autre.



Ensuite, nous calculons le reste de la division de cette distance par 3. Les restes sont 0, 1 ou 2. Tous les carrés ayant le même reste de la distance sont colorés d'une couleur et les carrés ayant des restes différents sont colorés de couleurs différentes.



1. Expliquez pourquoi le fait de placer des reines sur toutes les cases d'une couleur donnée permet de menacer toutes les cases du polyomino.
2. Une solution minimale est alors obtenue en prenant les carrés d'une couleur apparaissant le moins souvent. Identifiez les deux solutions dans l'exemple. Expliquez pourquoi cette couleur apparaît au plus m fois, où m est la partie entière de $\frac{n}{3}$.
3. Explorez l'algorithme sur d'autres polyominos.
4. Dessinez des polyominos pour lesquels on peut utiliser moins de reines que le nombre donné par l'algorithme.