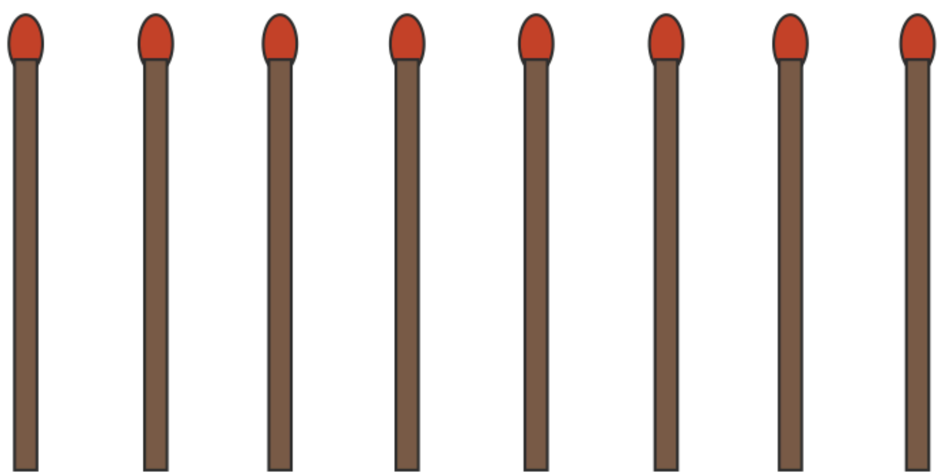
Juegos matemáticos

Participantes:
A partir de 10 años. Algunas actividades son aptas para mayores de 15 años.

El juego de NIM:

Este es un antiguo juego de estrategia para dos jugadores cuyo origen es incierto (algunos creen que es de China). Existen muchas variantes.

1. *Primera variante:* Se colocan una cierta cantidad de cerillas (se pueden usar otros objetos: dedos, palos, lápices…) sobre la mesa, en fila .

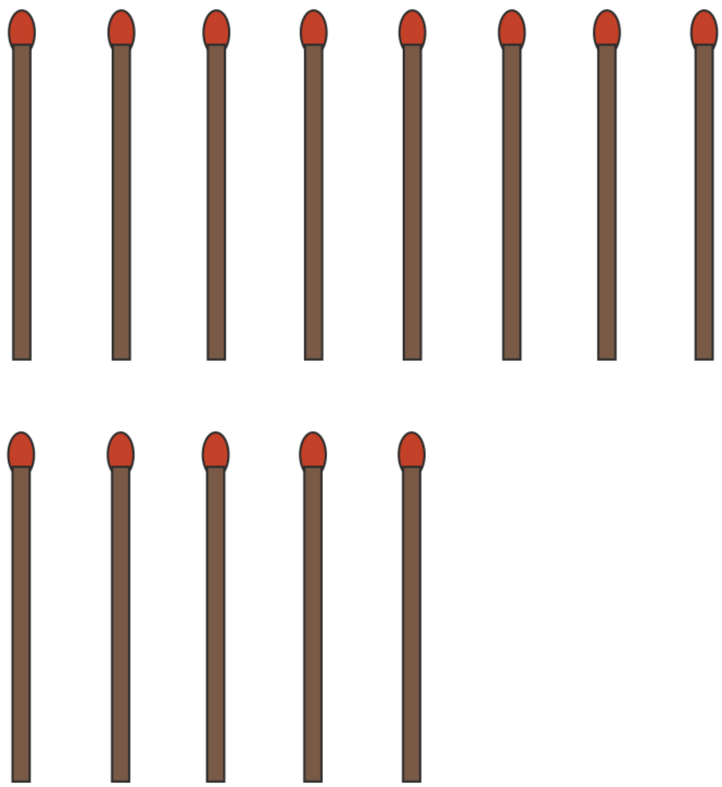
   

   Cada persona que juega, por turnos, puede eliminar una, dos o tres cerillas. Gana quien se lleva la última cerilla: este es el “juego codicioso”.
   Intente encontrar una estrategia ganadora. Esta estrategia ganadora es la siguiente: dejar en el tablero siempre un número de cerillas que sea múltiplo de cuatro. Si originalmente hay un múltiplo de cuatro, quien juega primero está en posición perdedora; de lo contrario, quien juega primero está en posición ganadora. Intente demostrar esta afirmación.

2. *Segunda variante*: Partimos de la misma configuración, una fila con un cierto número de cerillas. Esta vez, pierde quien se lleva la última cerilla: este es el “juego *misère*”.

Intente encontrar una estrategia ganadora. Esta estrategia ganadora es la siguiente: dejar el tablero con un número de cerillas que sea múltiplo de 4 más uno. Si originalmente hay un múltiplo de cuatro más uno, quien juegue primero está en posición perdedora; de lo contrario, está en posición ganadora.

3. Pruebe a proponer a un grupo de estudiantes la versión codiciosa, y a otro grupo la versión misère. Luego mezcle ambos grupos y haga que en cada pareja haya una persona que haya practicado con cada una de las dos versiones. Jueguen varias veces, alternando la versión jugada, la persona que comienza, y el número de cerillas.
4. *Tercera variante:* El juego ahora tiene varias filas, y cada fila puede contener cualquier número de cerillas.



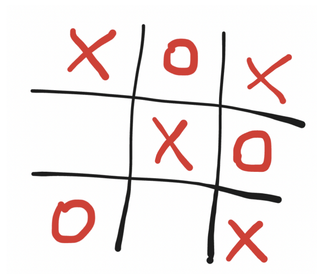
Las dos personas se alternan y cada una toma cualquier número de cerillas de cualquier fila. Gana quien toma la última cerilla.

   a. Pruebe a jugar con 2 filas. Demuestre que la estrategia ganadora consiste en equilibrar el tablero: gana quien consiga hacer que las dos filas tengan el mismo número de elementos.
   b. Tomemos nuevamente 2 filas y cambiemos la regla ganadora a la versión misère: pierde quien toma la última cerilla. Demuestre que la estrategia ganadora es la misma durante la mayor parte del juego: intente equilibrar el tablero para obtener tamaños iguales en ambas filas, por ejemplo, (5,5) o (4,4), o (3,3), o (2,2). Cuando alcance la posición (2,2), debe jugar de manera diferente. Explique cómo.

c. Pruebe ahora con tres filas con igual número de cerillas. Muestre que quien juegue en segundo lugar tiene una estrategia ganadora, reduciendo el tablero a dos filas.
d. Pruebe ahora con 3 filas con diferente número de cerillas. Construya una serie de “posiciones ganadoras”, por ejemplo (0,0,1), (1,1,1), (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (1, 8, 9), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (4, 8, 12), (4, 9, 13), (5, 8, 13), (5, 9, 12), etc. Verifique que quien se encuentre en una de esas posiciones tiene una manera de ganar. Para ello, muestre que sea cual sea el movimiento de su oponente, esta persona puede volver a otra posición de la lista, con menos cerillas, lo que le lleva a la victoria.
e. Haga lo mismo con 4 filas y compruebe que llegar a una de las siguientes configuraciones es una estrategia ganadora: (1, 1,n,n) para cualquier n, (1, 2, 4, 7), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 5, 7), (2, 3, 4, 5) , (2, 3, 6, 7), (2, 3, 8, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 8, 9), (m,m,n,n) para cualquier m, n.
f. El caso general está explicado en el apéndice , y está recomendado para para edades entre 15 y 18 años. Es útil conocer el sistema de numeración en base 2.

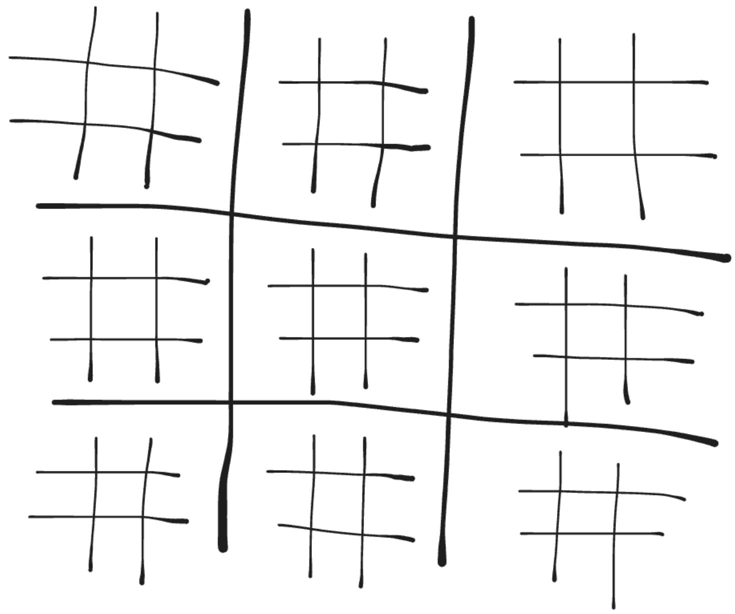
El juego de Tres en raya (Tic Tac Toe) y algunas generalizaciones:

El juego de Tres en raya (también conocido como ceros y cruces, tres en línea, cerito cruz, michi, triqui, cuadritos, tatetí y muchas otras variantes) se remonta al antiguo Egipto. En una cuadrícula de 3x3, cada participante coloca su símbolo (X u O) en un cuadrado, por turnos. Gana quien primero alinee tres símbolos iguales en una fila, columna o diagonal.

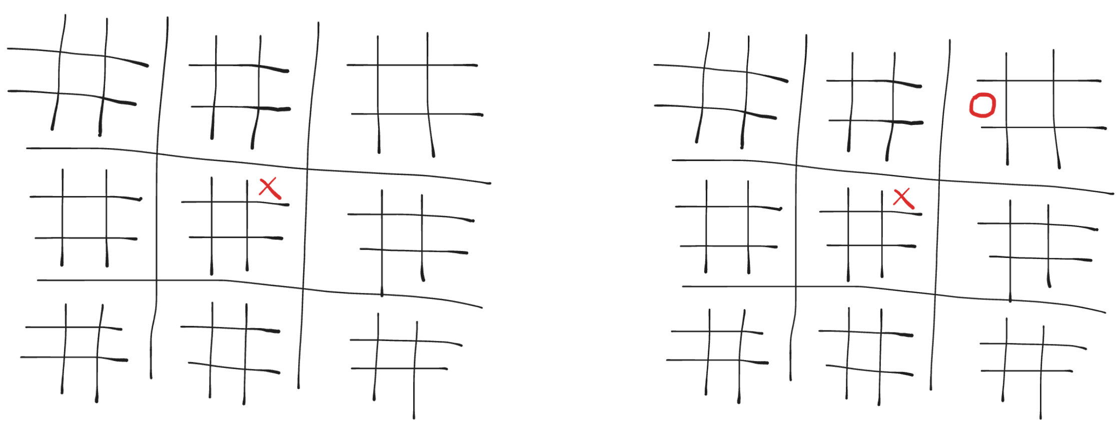


- Demuestre que si todos los jugadores juegan inteligentemente, nadie gana. Esto se puede hacer determinando un movimiento estratégico para cada movimiento posible del oponente.
- Una generalización es jugar en una cuadrícula tridimensional de 3x3x3. Demuestre que quien juegue en primer lugar tiene una estrategia ganadora consistente en colocar su signo en el cubo central. Demuestre esta afirmación describiendo cada respuesta del primer jugador a cada movimiento de su oponente.
- Pruebe a jugar en una cuadrícula de 4x4. Gana quien primero coloca 4 de sus marcas en una fila horizontal o vertical, o en un cuadrado de 2x2, o en las cuatro esquinas de la cuadrícula. Experimente estrategias para este juego.

El juego de Súper Tres en raya (Ultimate Tic Tac Toe)
En una cuadrícula grande de 3x3, cada cuadrado contiene una cuadrícula más pequeña de 3x3 para jugar al tres en raya..



El primer jugador puede jugar con su símbolo (X u O) en cualquier casilla de cualquier cuadrícula pequeña. Cada movimiento determina cuál de las pequeñas cuadrículas se utilizará en el siguiente turno. Por ejemplo, si el primer jugador coloca una X en el cuadrado superior derecho de la cuadrícula pequeña central, la siguiente jugadora debe colocar una O en algún lugar de la cuadrícula pequeña ubicada en la esquina superior derecha de la cuadrícula grande.



Ejemplo de los primeros movimientos de un juego. Para el primer movimiento, el jugador 1 puede poner una X en cualquier lugar. Dado que el jugador 1 jugó en la esquina superior derecha, la jugadora 2 tendría que poner una O en algún lugar de la cuadrícula superior derecha. Para el tercer movimiento, el jugador 1 tendrá que poner una X en alguna casilla de la pequeña cuadrícula situada en la columna 1 y la fila 2 de la cuadrícula grande.

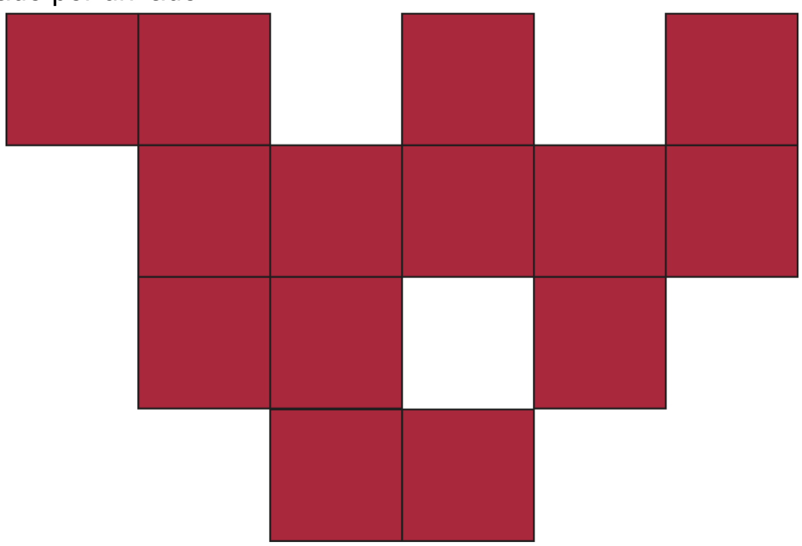
Cada vez que alguien logra formar tres en línea en una cuadrícula pequeña, ese cuadrado grande de la cuadrícula grande le pertenece. Gana el juego quien logra ganar la gran cuadrícula del tres en raya, ganando tres tres en raya más pequeños en línea.

Si alguien es enviado a una cuadrícula que está llena, o que ya ha sido ganada, entonces esta persona puede elegir cualquier otra cuadrícula pequeña para colocar la siguiente X u O.

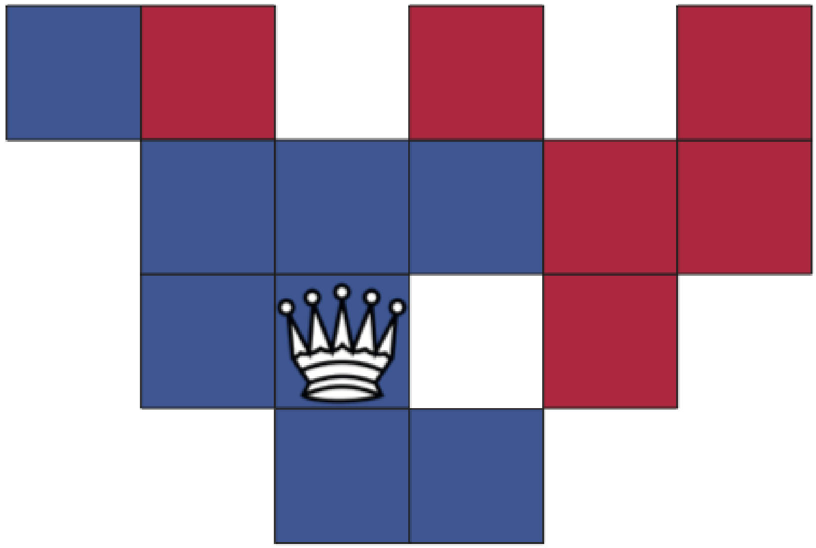
Referencia:https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_tic-tac-toe

Reinas en tableros de ajedrez
En un tablero de ajedrez, la reina puede moverse en horizontal, en vertical y diagonalmente. Una reina está amenazada por otra reina si la segunda reina puede moverse a la posición de la primera reina, ya sea horizontal, vertical o diagonalmente.

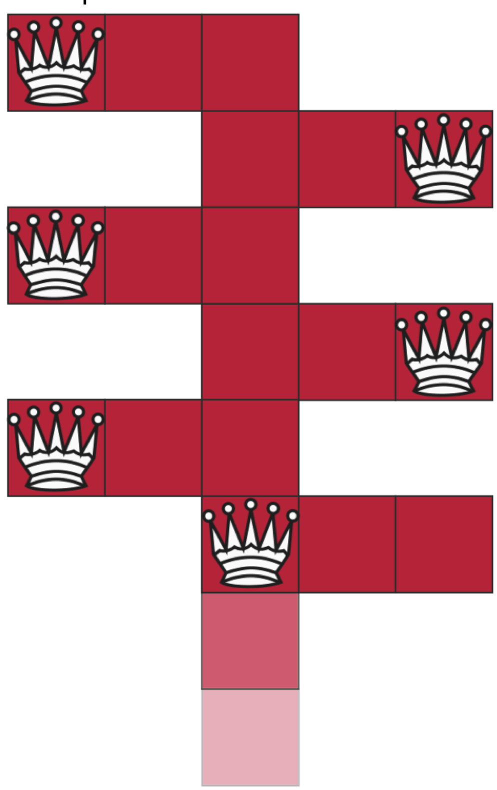
- Tome un tablero de ajedrez de 4x4 y coloque cuatro reinas, de modo que ninguna de ellas se amenace entre sí.
- Haga lo mismo con un tablero de ajedrez de 5x5 y cinco reinas.
- Haga lo mismo con un tablero de ajedrez de 6x6 y seis reinas.
- Es posible generalizar la forma del tablero de ajedrez a un poliminó, que es un conjunto conectado de cuadrados, siendo cada cuadrado adyacente al menos a otro cuadrado por un lado.



La cuestión entonces es determinar el número mínimo de reinas necesarias para amenazar todas las casillas delpoliomino.Aquí están las casillas amenazadas por una reina.



- Para este poliminó, tres reinas son suficientes. ¿Puede colocarlas?
- El resultado general es que si el poliminó tiene n casillas, entonces siempre será posible amenazar todas las casillas con como máximo m reinas, donde m es la parte entera de $\frac{n}{3}$. En el siguiente ejemplo, que tiene 18 casillas (o 19 o 20 si sumamos una o ambas casillas inferiores transparentes), no es posible usar menos de 6 reinas para amenazar todas las casillas.



Esto se puede generalizar a un poliminó con $3n$ cuadrados (o $3n + 1$, o $3n + 2$ cuadrados) para los cuales al menos n reinas son necesarias para amenazar todas las casillas.

- Dibuje otros polimínós y determine en cada caso el número mínimo de reinas necesarias para amenazar todas las casillas.
- La demostración de que a lo sumo m reinas son suficientes, donde m es la parte entera de $\frac{n}{3}$ está contenida en el Apéndice 2, y está recomendada para edades de 15 a 18 años.

¡Cree y comparta!
Cree nuevas reglas para los juegos mencionados anteriormente y compártalas usando el hashtag **#idm314juegos** y **#idm314**.

Referencias

Para el Super Tres en raya:
https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_tic-tac-toe
Juego en línea con IA: https://www.uttt.ai/

Para las reinas en polimínós (en francés):
https://accromath.uqam.ca/2022/09/des-dames-sur-detranges-echiquiers/
Juego en linea: www.erikaroldan.net/queensrooksdomination

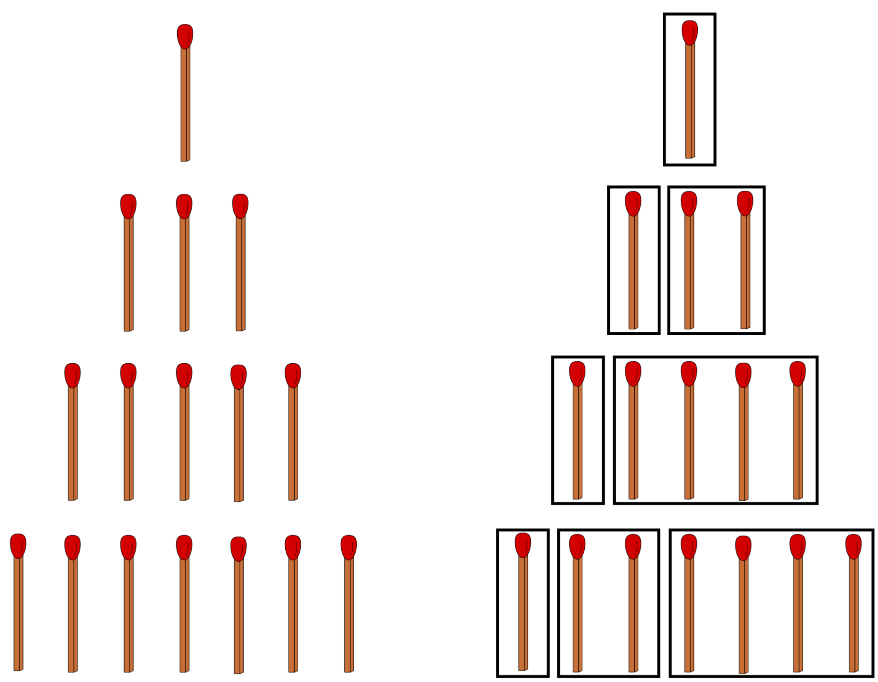
Apéndice 1. El caso general del juego de Nim:

La estrategia ganadora para 3 o más filas (como ocurre con dos filas) pasa por mantener el juego "en equilibrio", pero eso tiene un significado preciso y sutil.

En cada fila se pueden formar grupos de 1, 2, 4, 8… (potencias de 2) cerillas. Estos grupos son únicos (salvo reordenar las cerillas) y hay como máximo uno de cada uno de estos grupos por fila (esto equivale a descomponer un número en binario, por ejemplo 13 = 8 + 4 + 1).
Cuente el número de grupos de 1 cerilla, el número de grupos de 2 cerillas, etc. Decimos que el tablero está equilibrado si hay un número par de cada uno de esos grupos.

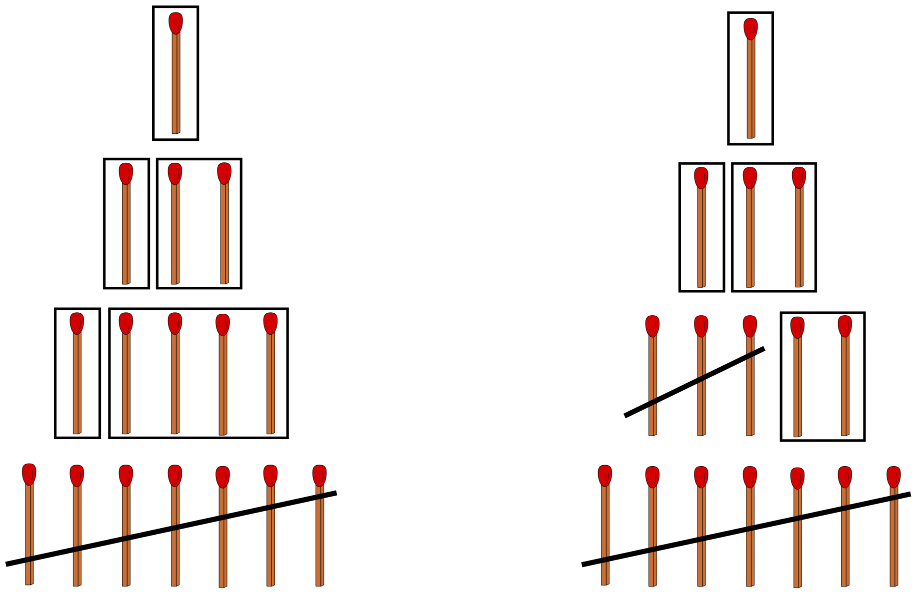
La estrategia ganadora consiste en dejar siempre el tablero equilibrado. Esto siempre es posible desde una posición desequilibrada.

Veamos un ejemplo, una configuración popular de NIM en forma de pirámide, que consta de cuatro filas con 1,3,5 y 7 coincidencias:



Este tablero comienza en un estado equilibrado: hay un número par de grupos de 1 cerilla (4 grupos), un número par de grupos de 2 cerillas (2 grupos) y un número par de grupos de 4 cerillas (2 grupos). Quien empiece a jugar necesariamente romperá el equilibrio y, por lo tanto, estará en una posición perdedora.

Supongamos que su oponente empieza a jugar y usted juega una estrategia ganadora. Si su oponente elimina un grupo de 1, 2 o 4, usted puede eliminar otro grupo igual. Si su oponente elimina, por ejemplo, toda la última fila (eliminando un grupo de 1, un grupo de 2 y un grupo de 4), su tarea será equilibrar nuevamente el tablero. Ciertamente, necesita destruir el otro grupo de 4 (de lo contrario el juego quedará desequilibrado), por lo que usted debe jugar en la fila 3 eliminando algunas cerillas. Las otras dos filas en las que no jugará (filas 1 y 2) tienen dos grupos de 1 y un grupo de 2, por lo que solo necesita otro grupo de 2 para equilibrar. Por lo tanto, su movimiento es dejar sólo un grupo de 2 cerillas en la fila 3 (es decir, quitar 3 cerillas y dejar 2).



Un posible primer y segundo movimiento en este juego de NIM. El segundo movimiento restablece el equilibrio.

En general, debe fijarse en el bloque más grande que su oponente dejó desequilibrado y actuar en una fila que tenga un bloque coincidente del mismo tamaño. A continuación, vea todas las demás filas y comprueba qué grupos están equilibrados y qué grupos no lo están. Siempre podrá equilibrar el tablero.

La clave de esta estrategia (el teorema matemático que demuestra que esta estrategia funciona) consta de dos enunciados: a) Si el tablero está equilibrado, quedará desequilibrado con cualquier movimiento, dejándolo en una posición perdedora. b) Si el tablero está desequilibrado, siempre hay un movimiento que lo equilibra, dejándolo en una posición ganadora.

Si queremos escribirlo en notación en base 2:

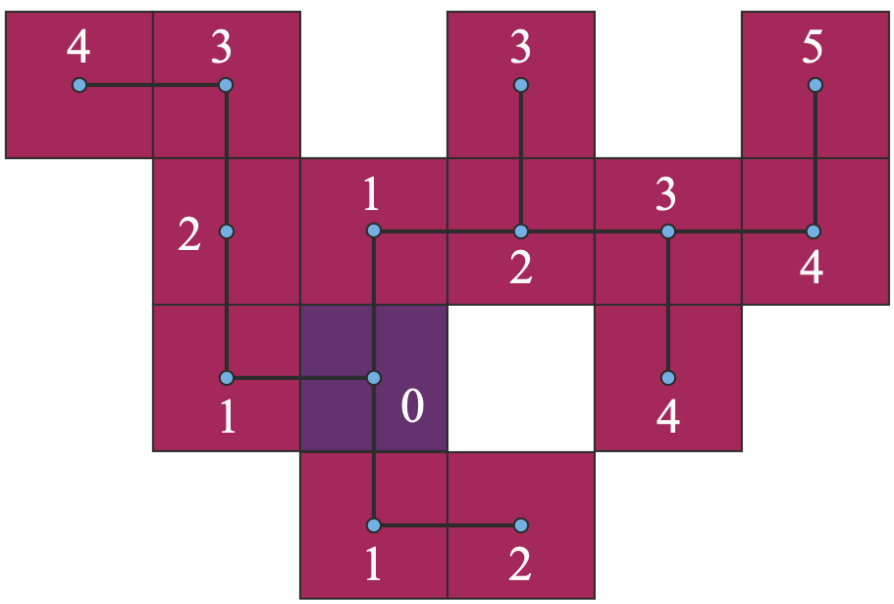
Consideremos un juego de Nim con m filas, que contienen respectivamente $n_1, \ldots, n_m$ cerillas. Escribimos cada uno de los números $n_1, \ldots, n_m$ en base 2. Cada número es entonces una suma de potencias 2^i para algnunos $i = 0, \ldots, N$. Cuente cuantas veces una potencia dada 2^i aparece en todos $n_1, \ldots, n_m$. Si aparece un número par de veces, entonces

definimos $a_i = 0$. Si aparece un número impar de veces, entonces definimos $a_i = 1$. Por ejemplo. Partimos de tres filas con 9, 5 y 6 cerillas respectivamente. Entonces $n_1 = 9 = 2^3 + 2^0$,$n_2 = 5 = 2^2 + 2^0$,$n_3 = 6 = 2^2 + 2^1$. Luego $a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$
.
Afirmamos que la estrategia ganadora para un jugador es hacer un movimiento de manera que todos los a_i iguales a 0. En particular, afirmamos que

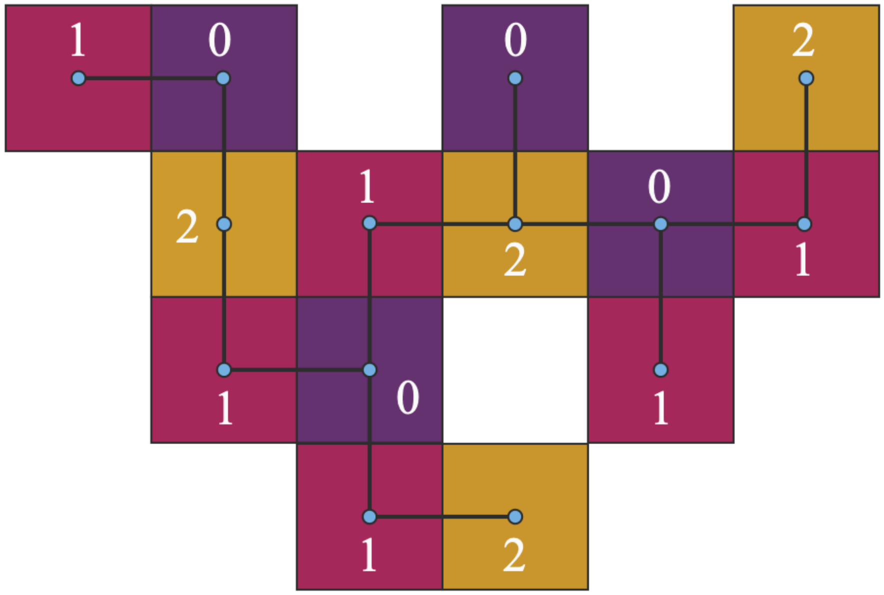
1. Si todos loa $a_i = 0$, $i = 0, \ldots, N$, entonces cualquier movimiento hará al menos un a_i ser distinto de cero.
2. Si algunos a_i son distintos de cero, entonces existe una manera de quitar algunas cerillas en una fila para hacer que todos los a_i valgan 0.

Demuestre las afirmaciones 1 y 2. Esto implica que el jugador que consigue equilibrar el tablero (todos los a_i iguales a 0) puede reducir el tablero hasta la posición (0,0,...., 0), que es la ganadora.

Apéndice 2. Un algoritmo para colocar las reinas en un poliominó:
Tomemos un poliminó y marquemos el centro de cada cuadro. Podemos suponer que los cuadros tienen lados de longitud igual a 1. Decidimos marcar un cuadro central y medimos la distancia mínima desde su centro al centro de los otros cuadros cuando nos movemos horizontal o verticalmente de centro a centro.



Luego calculamos el resto de la división de esta distancia entre 3. Este resto puede ser 0, 1 o 2. Coloreamos todos los cuadros con el mismo resto con el mismo color, y los cuadros con restos diferentes se colorean con colores diferentes.



1. Explique por qué colocar reinas en todos los cuadros de un color determinado permite amenazar todos los cuadros del poliminó.
2. Obtenemos entonces una solución mínima tomando los cuadros del color que aparezca con menos frecuencia. Identifique las dos soluciones en el ejemplo. Explique por qué este color aparece como máximo m veces,, donde m es la parte entera de $\frac{n}{3}$.
3. Pruebe el algoritmo en otros poliminós.
4. Dibuje poliminós para los que podamos usar menos reinas que el número dado por el algoritmo.